Jurnal Terjemahan Alam & Tamadun Melayu 2:2 (2011) 53 - 67

Landasan Teori Kenisbian Am: Bahagian 2

ALBERT EINSTEIN

9. PERSAMAAN GARIS GEODESI. GERAKAN SEBUTIR ZARAH

Oleh sebab unsur garis *ds* ditakrifkan secara tidak bersandarnya daripada sistem ko-ordinat, maka garis yang dilukis antara dua titik P dan P′ daripada kontinum empat-matra itu adalah sedemikian rupa sehingga ∫ *ds* pegun – yang menghasilkan garis terpendek yang dinamai garis geodesi – bermakna juga tidak bersandar pilihan ko-ordinat. Persamaannya ialah

$$\delta\int_{P}^{P'} ds = 0 \qquad \text{(20)}$$

Dengan melakukan ubahan sebegini, maka kita peroleh daripada persamaan ini empat persamaan terbitan yang mentakrifkan garis geodesi; operasi ini akan diperihal di sini bagi tujuan kelengkapannya. Katalah lambda, λ, ialah fungsi ko-ordinast x_v, dan katalah ini mentakrifkan sebuah famili permukaan yang memotong garis geodesi yang dikehendaki di samping semua garis keproksimasian serta-merta kepadanya yang dilukis menerusi garis P dan P′. Barang garis sedemikian boleh diandaikan telah diketahui menerusi ungkapan ko-ordinatnya x_v sebagai fungsi daripada lambda itu. Katalah simbol delta, δ, mengindikasi peralihan daripada titik geodesi yang diperlukan kepada titik yang sepadan dengan lambda yang sama pada garis jiran. Dengan itu, untuk (20) kita boleh menggantinya dengan

$$\left.\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\delta w\, d\lambda &= 0 \\ w^2 &= g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(20a)}$$

Akan tetapi oleh sebab

$$\delta w = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\delta x_\sigma + g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right)\right\},$$

dan

$$\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda}(\delta x_\nu),$$

kami peroleh daripada (20a), selepas pengamiran separa,

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \kappa_\sigma \delta x_\sigma d\lambda = 0,$$

yang

$$\kappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\nu}}{w}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right\} - \frac{1}{2w}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda} \quad . \quad (20b)$$

Oleh sebab nilai δx^σ adalah sebarangan, maka ekoran daripada inididapati

$$\kappa_\sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20c)$$

adalah persamaan garis geodesi.

Jika *ds* tidak lenyap di sepanjang garis geodesi, kita boleh pilih "panjang lengkok" *s*, disukat di sepanjang garis geodesi, bagi parameter λ. Kemudian ambilah ω=1, dan (20c) pun menjadi

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0$$

atau, dengan sekadar mengubah tatatanda,

$$g_{a\sigma}\frac{d^2x_a}{ds^2} + [\mu\nu, \sigma]\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad (20d)$$

yang di sini, dengan mengikut Christoffel, kami menulis

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right) \quad . \quad . \quad (21)$$

Akhirnya, jika didarabkan (20d) dengan $g^{\sigma\tau}$ (pendaraban terkeluar terhadap τ, terkedalam terhadap σ), akan diperoleh persamaan garis geodesi dalam bentuk

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} + \{\mu\nu, \tau\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad (22)$$

yang di sini kami mengikut Christoffel lagi dengan meletakkan

$$\{\mu\nu, \tau\} = g^{\tau a}[\mu\nu, a] \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

10. PEMBENTUKAN TENSOR DENGAN PEMERBEZAAN

Dengan pertolongan persamaan garis geodesi, kita bolehlah sekarang mendeduksikan hukum-hukum yang membentuk tensor baru daripada yang lama menerusi pemerbezaan (sesetengah pihak: pembezaan atau diferensiasi). Dengan cara ini kami buat pertama kalinya boleh memformulasikan persamaan terbitan kovarian secara amnya. Kami sampai kepada gol ini dengan penerapan berulangan pada hukum simpel yang berikut ini:

Jika dalam kontinum kita, selembar lengkung disediakan, segala titik yang ditentukan jarak lengkok *s* yang disukat dari titik tetap pada lengkung itu, dan jika, selanjutnya,

$$\phi,$$

ialah fungsi invarian daripada ruang, maka

$$\frac{d\phi}{ds}$$

juga suatu invarian. Buktinya terletak pada hakikat invariannya *ds* dan $d\phi$.

Oleh sebab

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

maka

$$\psi = \frac{\partial\phi}{dx_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

juga invarian, dan suatu invarian bagi semua lengkung yang bermula dari titik kontinum, iaitu, bagi barang pilihan daripada vektor dx_m. Oleh yang demikian dengan semertanya berikutan dengan itu

$$A_\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

adalah vektor-empat kovarian – dinamai **"kecerunan"** bagi ϕ.

Mengikut petua kami, hasil bahagi pembeza

$$\chi = \frac{d\psi}{ds}$$

yang diambil pada lengkung adalah serupa invariannya. Dengan membubuh di sini nilai

ψ,

kami beroleh awal-awal lagi

$$\chi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}.$$

Kewujudan sesuatu tensor tidak boleh dideduksikan daripada keadaan ini. Akan tetapi jika kita boleh ambil lengkung yang disepanjangnyalah dilakukan pemerbezaan itu, maka kita berolah daripada tukar ganti bagi

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2}$$

daripada (22),

$$\chi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\}\frac{\partial\phi}{\partial x_\tau}\right)\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Oleh sebab kita boleh saling tukar tertib pemerbezaan, dan oleh sebab menerusi (23) dan (21) $\{\mu\nu,\tau\}$ adalah simetri terhadap μ dan ν, maka ekorannya ungkapan di dalam kurungan adalah simetri terhadap μ dan ν. Oleh sebab garis geodesi itu boleh dilukis mengikut barang arah daripada satu titik kontinum, dan oleh sebab itu

$$\frac{dx_\mu}{ds}$$

adalah vektor-empat dengan nisbah daripada komponen-komponennya sembarangan, maka berikutan hasil daripada seksyen §7 bahawa

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\}\frac{\partial\phi}{\partial x_\tau} \qquad . \quad . \quad . \quad (25)$$

adalah tensor kovarian beragra (berangki) kedua. Oleh sebab itu kami sampai pada hasil ini: daripada tensor kovarian yang beragra (berangki) pertama

$$A_\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}$$

Kita boleh dengan pemerbezaan membentuk tensor kovarian beragra kedua

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\}A_\tau \qquad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Kami namai $A_{\mu\nu}$ sebagai tensor "perluasan" (terbitan kovarian bagi tensor A_μ). Daripada mula-mula lagi kami bersedia menunjukkan bahawa operasi "terbitan kovarian” itu membawa kepada sebuah tensor baru, sekalipun jika vektor A_μ tidak boleh diwakili sebagai satu keceruan. Untuk melihat hal ini, pertamanya kami mencerapi bahawa

$$\psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$$

adalah vektor kovarian, jika ψ dan ϕ adalah skalar. Hasil tambah empat sebutan sedemikian itu

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\phi \partial^{(1)}}{\partial x_\mu} + . + . + \psi^{(4)} \frac{\partial \phi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

Adalah juga vektor kovarian, jika

$$\psi^{(1)}, \phi^{(1)} \quad . \quad . \quad . \quad \psi^{(4)}, \phi^{(4)}$$

adalah skalar. Akan tetapi jelaslah bahawa barang vektor kovarian boleh diwakili dalam bentuk S_μ. Sebabnya, jika A_μ ialah vektor yang komponennya adalah barang fungsi yang daripada x_ν yang disediakan, kita hanya terpaksa meletakkan (dalam sebutan sistem ko-ordinat yang dipilih)

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)} &= A_1, & \phi^{(1)} &= x_1, \\
\psi^{(2)} &= A_2, & \phi^{(2)} &= x_2, \\
\psi^{(3)} &= A_3, & \phi^{(3)} &= x_3, \\
\psi^{(4)} &= A_4, & \phi^{(4)} &= x_4,
\end{aligned}$$

Dengan tujuan memastikan bahawa S_μ menjadi sama dengan A_μ.

Oleh sebab itu, dengan tujuan mendemonstrasikan bahawa $A_{\mu\nu}$ adalah tensor jika *barang* vektor kovarian dibubuh ke sebelah kanan bagi A_μ, kita hanya perlu menunjukkan bahawa ini demikianlah halnya untuk vektor S_μ. Akan tetapi untuk tujuan yang kemudian ini, cukuplah, sebagaimana sekilas pandangnya sebelah kanan (26) mengajar kita, cukuplah menyediakan bukti untuk kasus

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}.$$

Sekarang, sebelah kanan (25) didarab dengan ψ,

$$\psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau}$$

adalah tensor. Begitu juga

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}$$

dalam keadaan hasil darab terkeluar dua vektor, adalah tensor. Dengan penambahan, turut terjadilah ciri tensor

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}\right) - \{\mu\nu, \tau\}\left(\psi\frac{\partial \phi}{\partial x_\tau}\right).$$

Sebagaimana sekilas pandangnya pada (26) akan menunjukkan bukti yang dikehendaki itu, ini melengkapkan demonstrasi bukti itu untuk vektor

$$\psi\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$$

dan akibatnya daripada hal yang telah pun dibuktikan selama ini, berlakulah untuk barang vektor A_μ.

Dengan cara perluasan vektor, kita boleh dengan mudahnya mentakrif "perluasan" tensor kovarian barang agra. Operasi ini ialah perumuman atau generalisasi bagi perluasan vektor. Kami menyempitkan diri kami kepada kasus tensor beragra kedua, kerana ini cukuplah memberi idea yang jelas bagi hukum pembentukannya.

Sebagaimana yang sudah sedia dicerapi selama ini, barang tensor kovarian beragra kedua boleh diwakili* sebagai hasil tambah tensor jenis $A_\mu B_\nu$. Menerusi penambahan empat tensor jenis ini, kita beroleh tensor $A_{\mu\nu}$ dengan barang komponen yang diumpukkan.

Oleh sebab itu, cukuplah kita mendeduksikan ungkapan untuk perluasan tensor bagi jenis istimewa ini. Menerusi (26), ungkapan

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\mu, \tau\}A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\nu, \tau\}B_\tau,$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

* menerusi pendaraban terkeluar bagi vektor dengan barang komponen A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} dengan vektor berkomponen 1,0,0,0, seseorang menghasilkan sebuah tensor berkomponen

$$\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

adalah tensor. Pendaraban terkeluar kepada yang pertama dengan B_ν, dan yang kedua dengan A_μ, kita beroleh dalam setiap kasus sebuah tensor beragra ketiga. Dengan menambah kuantiti ini, kita pun beroleh tensor beragra ketiga

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\mu, \tau\}A_{\tau\nu} - \{\sigma\nu, \tau\}A_{\mu\tau} \quad . \quad (27)$$

yang di sini kami letakkan $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Oleh sebab di sebelah kanan (27) adalah linear dan homogen dalam $A_{\mu\nu}$ dan terbitan pertamanya, maka hukum pembentukan ini membawa kepada tensor, tidak sahaja dalam kasus tensor jenis $A_\mu B_\nu$, tetapi juga dalam kasus hasil tambah tensor sedemikian, i.i. dalam kasus barang tensor kovarian beragra kedua. Kami namai $A_{\mu\nu\sigma}$ perluasan tensor $A_{\mu\nu}$.

Jelaslah bahawa (26) dan (24) hanya berkenaan dengan kasus perluasan istimewa (perluasan tensor masing-masing beragra kesatu dan kekosong).

Pada amnya, semua hukum istimewa pembentukan tensor adalah termasuk di dalam (27) mengikut gabungan dengan pendaraban tensor.

11. SESETENGAH KASUS YANG MUSTAHAKNYA ISTIMEWA

Tensor Asasi – Pertamanya, kami membuktikan sesetengah lema yang berguna selepas ini. Dengan petua atau aturan untuk pemerbezaan penentu, diperoleh

$$dg = g^{\mu\nu} g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g\, dg^{\mu\nu} \quad . \quad . \quad (28)$$

Sebutan terakhir (28) itu diperoleh daripada pemerbezaan

$$g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_\mu^{\mu'},$$

(lihat persamaan (30) terhadap pemboleh ubahnya sehinggakan

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4,$$

dan hasilnya

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

Daripada (28), diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log(-g)}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \quad (29)$$

Selanjutnya, daripada

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta^\nu_\mu,$$

ekoran daripada pemerbezaan memberikan

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\sigma}dg^{\nu\sigma} &= -g^{\nu\sigma}dg_{\mu\sigma} \\ g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} &= -g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Daripada ungkapan inilah, menerusi pendaraban bercampur dengan masing-masingnya $g^{\sigma\tau}$ dan $g_{\nu\lambda}$ dan perubahan tatatanda untuk indeks, maka diperoleh

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\,dg_{\alpha\beta} \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

dan

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\,dg^{\alpha\beta} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Hubungan (31) diakui sebagai transformasi, yang dengannyalah kami juga sering menggunakannya. Daripada (21),

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = [\alpha\sigma, \beta] + [\beta\sigma, \alpha] \quad . \quad . \quad (33)$$

Dengan membubuhkan ungkapan ini ke dalam rumus (31), kami beroleh (23)

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g^{\mu\tau}\{\tau\sigma, \nu\} - g^{\nu\tau}\{\tau\sigma, \mu\} \quad . \quad . \quad (34)$$

Dengan menukar ganti sebelah kanan (34) di dalam (29), akan diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \{\mu\sigma, \mu\} \quad . \quad . \quad (29a)$$

"Kecapahan" Vektor Kontravarian – Jika kita ambil hasil darab terkedalam bagi (26) dengan tensor asasi $g^{\mu\nu}$, sebelah kanan, selepas penjelmaan sebutan pertama, menjadi bentuk

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu}A_\mu) - A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)g^{\mu\nu}A_\tau.$$

Mengikut kepatuhannya dengan (31) dan (29), sebutan terakhir ungkapan ini boleh ditulis

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau + \tfrac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\mu\nu}A_\tau.$$

Sebab berbezanya lambang indeks hasil tambah tidaklah menjejaskan apa-apa, dua sebutan pertama ungkapan ini dapat disatukan. Jika ditulis

$$g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu,$$

sehinggakan A_μ sama seperti A^ν adalah vektor sembarangan, maka akhirnya diperoleh

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}A^\nu) \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Skalar ini ialah *kecapahan* vektor kontravarian A^ν.

"Keikalan" Vektor Kovarian – Sebutan kedua di dalam (26) adalah simetri tehadap indeks μ dan ν. Oleh sebeb itu $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ adalah khususnya terbina dengan mudahnya sebagai tensor antisimetri. Kita beroleh

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Inilah *keikalan* vektor kovarian A_μ

Perluasan Antisimetri bagi Vektor-enam – Dengan mengenakan (27) kepada tensor antisimetri beragra kedua $A_{\mu\nu}$, selanjutnya membentuk dua persamaan yang timbul menerusi pilih atur berkitar indeks, dan menambahkan tiga persamaan ini, kita beroleh tensor beragra ketiga

$$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} \quad (37)$$

yang dengan mudahnya boleh dbuktikan bersifat antisimetri.

Kecapahan sesebuah Vektor-enam – Dengan mengambil hasil darab bercampur dengan

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta},$$

kita juga beroleh tensor. Sebutan pertama sebelah kanan (27) boleh ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}) - g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

Jika kita tulis

$$A_\sigma^{\alpha\beta}$$

untuk

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$$

dan

$$A^{\alpha\beta}$$

untuk

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu},$$

dan dalam sebutan pertama yang terjelma atau tertransformasi mengambil alih

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}$$

dan

$$\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

dengan nilai-nilainya yang diberi (34), maka terhasillah daripada sebelah kanan (27) ungkapan yang terdiri daripada tujuh sebutan, empat daripadanya hapus, dan yang tinggalnya

$$A_\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \{\sigma\gamma, \alpha\}A^{\gamma\beta} + \{\sigma\gamma, \beta\}A^{\alpha\gamma} \quad . \quad . \quad (38)$$

Ini ialah ungkapan untuk perluasan tensor kontravarian beragra kedua, dan ungkapan yang sepadan untuk perluasan tensor kontravarian beragra lebih tinggi dan lebih rendah boleh juga dibentuk.

Kami mengambil perhatian bahawa mengikut cara yang seanalog membolehkan kita juga membentuk perluasan tensor bercampur:

$$A_{\mu\sigma}^{\alpha} = \frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\mu, \tau\}A_\tau^\alpha + \{\sigma\tau, \alpha\}A_\mu^\tau \quad . \quad . \quad (39)$$

Dengan menguncupkan (38) terhadap indeks β dan σ (pendaraban terkedalam dengan $\delta^\sigma{}_\beta$), maka kita beroleh vektor

$$A^{\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \{\beta\gamma, \beta\}A^{\alpha\gamma} + \{\beta\gamma, \alpha\}A^{\gamma\beta}.$$

Berasaskan peri simetrinya

$$\{\beta\gamma, \alpha\}$$

terhadap indeks β dan γ, sebutan ketiga sebelah kanan lenyap, jika $A^{\alpha\beta}$, seperti yang akan kami anggap nanti, adalah tensor anti-simetri. Sebutan kedua mengizinkan dirinya sendiri ditransformasi mengikut keakurannya dengan (29a). oleh yang demikian, diperolehlah

$$A^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta})}{\partial x_{\beta}} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Inilah ungkapan untuk *kecapahan* vektor-enam kontravarian.

Kecapahan sesebuah Tensor Bercampur Beragra Kedua – Dengan menguncupkan (39) terhadap indeks α dan σ, dan dengan mengambil (29a) ke dalam pertimbangan, kami beroleh

$$\sqrt{-g}A_{\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}} - \{\sigma\mu, \tau\}\sqrt{-g}A_{\tau}^{\sigma} \quad . \quad (41)$$

Jika kita memperkenalkan tensor kovarian

$$A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau}A_{\tau}^{\sigma}$$

dalam sebutan terakhir itu, maka tensor itu menjadi berbentuk

$$-[\sigma\mu, \rho]\sqrt{-g}A^{\rho\sigma}.$$

Jika , selanjutnya, tensor

$$A^{\rho\sigma}$$

adalah simetri, maka ini menurunkan tensor di atas itu kepada

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A^{\rho\sigma}.$$

Jika kita memperkenalkan, menggantikan

$$A^{\rho\sigma},$$

tensor kovarian

$$A_{\rho\sigma} = g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}A^{\alpha\beta},$$

yang juga simetri, maka sebutan terakhir, sebab (31), akan berbentuk

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}A_{\rho\sigma}.$$

Dalam persoalan kasus simetri, dalam hal itu (41) boleh diganti dengan dua bentuk

$$\sqrt{-g}A_\mu = \frac{\partial(\sqrt{-g}A_\mu^\sigma)}{\partial x_\sigma} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\sqrt{-g}A^{\rho\sigma} \quad . \qquad (41a)$$

$$\sqrt{-g}A_\mu = \frac{\partial(\sqrt{-g}A_\mu^\sigma)}{\partial x_\sigma} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\sqrt{-g}A_{\rho\sigma} \quad . \qquad (41b)$$

yang kami terpaksa memakainya kemudian.

§ 12. TENSOR RIEMANN-CHRISTOFFEL

Sekarang kita mencari tensor yang boleh diperoleh daripada tensor asasi *sedirian,* menerusi pemerbezaan. Pada lihatan pertama, penyelesaiannya nampak jelas. Kita letakkan tensor asasi darpada $g_{\mu\nu}$ dalam (27) sebagai ganti barang tensor $A_{\mu\nu}$ yang diberi, dan oleh yang demikian kita ada tensor baru, iaitu, perluasan tensor asasi. Akan tetapi kita dengan mudahnya meyakinkan diri bahawa perluasan ini lenyap secara sama secamannya. Walau bagaimanapun kita mencapai gol itu dengan cara yang berikut. Dalam (27) kita letakkan

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \rho\}A_\rho,$$

i.i. perluassan vektor-empat A_μ. Kemudian (dengan penamaan indeks yang agak berbeza) kami dapat tensor beragra ketiga

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \{\mu\sigma, \rho\}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \{\mu\tau, \rho\}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\tau, \rho\}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}$$
$$+ \left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\{\mu\sigma, \rho\} + \{\mu\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\} + \{\sigma\tau, \alpha\}\{\alpha\mu, \rho\}\right]A_\rho.$$

Ungkapan ini mengesyorkan pembentukan tensor

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}.$$

Sebabnya, jika kita berbuat demikian, sebutan yang berikut daripada ungkapan untuk

$$A_{\mu\sigma\tau}$$

memarang (menghapuskan) ungkapan

$$A_{\mu\tau\sigma},$$

yang pertama, yang keempat dan anggota yang sepadan dengan sebutan terakhir dalam kurungan siku (segi empat sama); sebab semua ini bersimetri dalam σ dan τ. Hal yang sama berlaku pada hasil tambah sebutan kedua dan ketiga. Oleh yang demikian kita beroleh

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}A_{\rho} \qquad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$$B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = -\frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\{\mu\sigma, \rho\} + \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\{\mu\tau, \rho\} - \{\mu\sigma, \alpha\}\{\alpha\tau, \rho\}$$
$$+ \{\mu\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\} \quad (43)$$

fitur (ciri) saripati daripada hasil itu ialah bahawasanya sebelah kanan (42) A_{ρ} muncul sebatang kara, tanpa terbitannya. Daripada ciri tensor

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$$

bersempena dengan fakta bahawasanya A_{ρ} adalah vektor sembarangan, maka ekorannya, dengan taakulan daripada § 7,

$$B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$$

adalah tensor (tensor Riemann-Christoffel).

Mustahaknya tensor ini di segi matematik adalah seperti berikut:

Jika kontinum adalah tabii sedemikian rupa sehingga wujud sistem ko-ordinat yang dengan kerangka rujukan itulah g_{mn} adalah pemalar, maka semua

$$B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$$

lenyap. Jika kita pilih barang sistem ko-ordinat yang baru untuk mengambil alih yang asal itu, sehingga $g_{\mu\nu}$ yang dirujuk di situ tidak lagi pemalar, tetapi mengikut natijah daripada tabii tensornya, maka komponen

$$B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$$

yang terjelma itu akan masih lenyap dalam sistem baru itu. Oleh yang demikian, pelenyapan tensor Riemann adalah syarat perlu *, menerusi pilihan sistem kerangka rujukan yang wajar, $g_{\mu\nu}$ boleh menjadi pemalar. Dalam masalah kita ini sepadan dengan kasus yang, dengan pilihan sistem kerangka rujukan yang sesuai, Teori Kenisbian Khas berlaku dengan baiknya dalam rantau kontinum yang *terhingga* atau *terpermanai.*

Dengan menguncupkan (43) terhadap indeks ô dan ñ, maka diperoleh tensor kovarian beragra kedua

$$\left.\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= B^{\rho}_{\mu\nu\rho} = R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\} \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Catatan tentang Pilihan Ko-ordinat — Sudah pun dicerapi dalam § 8, sehubungan dengan persamaan (18a), bahawasanya pilihan ko-ordinat boleh dibuat dengan advantejnya sehingga

$$\sqrt{-g} = 1.$$

Sekilas pandang pada persamaan yang diperoleh dalam dua seksyen yang lepas menunjukkan pilihan hukum pembentukan tensor menyusuri pensimpelan yang mustahak. Ini berlaku khususnya pada

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}$$

tensor yang baru dibangunkan itu, yang mengambil bahagian asasi di dalam teori yang akan diformulasikan kemudian ini. Sebab pengistimewaan (pengekhasan) pilihan ko-ordinat inilah menjadikan lenyapnya

$$\mathbf{S}_{\mu\nu},$$

sehingga tensor

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}$$

turun kepada

$$\mathbf{R}_{\mu\nu}$$

Atas pemerian inilah selepas ini kita akan memberi hubungan-hubungan dalam bentuk yang disimpelkan menerusi pengistimewaan pilihan koordinat itu. Kemudian mudah sahaja keadaan hal-ehwal yang diminati itu pun dapat dikembalikan kepada persamaan-persamaan kovarian secara amnya, jika inilah yang teringinkan nampaknya di dalam sesebuah kasus yang khas itu.

Nota: Bersambung dengan bahagian "C. Teori Medan Graviti" dalam keluaran jurnal ini yang akan datang.

(Sumber asal berasaskan "*the foundation of the general theory of relativity*" oleh Alfred Engel di dalam *Collected Papers of Albert Einstein* Vol. 6. Princeton Univ. Press 1997: 146-200 (Jil terj.) yang berupa terjemahan kepada karya asal Einstein dalam bahasa Jerman, *Die Grundlage der algemeinen Relativitatstheori* yang diterbitkan di dalam *Annalen* *der Physik IV Folg 1916* (49): 769-822 yang semuanya boleh dipunggah-turun di *http://www.alberteinstein.info/gallery/gtext3.html*)

Penterjemah: Shaharir Mohamad Zain, Ph.D
Felo Penyelidik Utama,
Pusat Dialog Peradaban,
Universiti Malaya
50603 Kuala Lumpur

Emel: riramzain@yahoo.com