

<http://www.ftsm.ukm.my/apjitm>

Asia-Pacific Journal of Information Technology and Multimedia

Jurnal Teknologi Maklumat dan Multimedia Asia-Pasifik

Vol.1 No. 2, December 2012

e-ISSN:2289-2192

Pengiraan Kamiran Terhadap Polinomial Rantau Tertakrif dan Sempadan dalam 2 dan 3 Dimensi

Michael Wester, Yuzita Yaacob, Stanly Steinberg

ABSTRAK

Kajian ini menggunakan algoritma Penguraian Aljabar Silinder yang lebih dikenali dengan *Cylindrical Algebraic Decomposition* (CAD) yang dilaksanakan dalam Mathematica bagi menghasilkan prosedur mengira secara analitik kamiran terhadap polinomial kawasan tertakrif dan sempadan dalam dua dan tiga dimensi. Berdasarkan hasil tersebut, teorem kecapahan dalam tiga dimensi atau teorem Green dalam dua dimensi dilaksanakan. Teorem tersebut penting bagi aplikasi pengamiran multidimensi dan turut menyediakan ujian ketepatan bagi mengimplementasi hasil yang diperolehi ke dalam sistem algebra komputer (SAK). Perisian yang terhasil dapat menyelesaikan banyak masalah melibatkan pengamiran dua dan tiga dimensi dalam buku teks kalkulus vektor. Kajian dalam tiga dimensi masih diteruskan. Hasil kajian ini dimuat dalam alat bantuan pelajar berautomasi bagi kalkulus vektor.

Kata Kunci: Kamiran Kawasan, Kamiran Garisan, Kamiran Isipadu, Kamiran Lelaran, Penguraian Algebra Silinder

ABSTRACT

This study uses the cylindrical algebraic decomposition algorithms implemented in Mathematica to produce procedures to analytically compute integrals over polynomially defined regions and their boundaries in two and three dimensions. Using these results, we can implement the divergence theorem in three dimensions or the Green's theorems in two dimensions. These theorems are of central importance in the applications of multidimensional integration. They also provide a strong correctness test for the implementation of our results in a computer algebra system. The resulting software can solve many of the two and some of the three dimensional integration problems in vector calculus textbooks. The three dimensional results are being extended. The results in this paper are being included in an automated student assistant for vector calculus.

Keyword: Area integral, Line integral, Volume integral, Iterated integrals, Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD).

1. PENGENALAN

Penilaian kamiran terhadap kawasan satah dan lengkung dalam dua dimensi merupakan masalah yang sering disebut dalam kebanyakan (barangkali semua) buku teks pengenalan kalkulus tahun satu. Teks yang lebih mendalam turut membincang kamiran terhadap isipadu, permukaan dan lengkung dalam tiga dimensi (Davis & Snider, 1995). Topik ini penting bagi

Makalah ini telah terbit dalam *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, 82(1):79-101 di bawah tajuk Computer Integrals over Polynomially Defined Regions and their Boundaries in 2 and 3 Dimensions.

pengaplikasian vektor dalam sains dan kejuruteraan. Kaedah penilaian numerik menjadi pilihan sekiranya geometri atau pengamiran fungsi adalah rumit. Apabila kamiran mudah, maka tumpuan diberi bagi membangun prosedur penilaian analitik bagi kamiran tersebut. Dalam kes dua dimensi, tumpuan diberi pada rantau satah dan lengkung bagi sempadan rantau tersebut. Dalam kes tiga dimensi, hanya isipadu yang mudah dan permukaan sempadan rantau tersebut dipertimbang. Kajian menganggap rantau satah dan isipadu boleh dijelas mengguna ketaksamaan polinomial.

Sumbangan penting dalam kajian ini ialah perluasan alat pengamiran dalam Mathematica bagi sempadan lengkung dan permukaan, membenar penggunaan teorem kecapahan dan teorem Green iaitu bahagian utama teori pengamiran dalam kalkulus vektor.

Alat asas dalam kajian ini ialah algoritma Penguraian Algebra Silinder yang lazim disebut sebagai *Cylindrical Algebraic Decomposition* (CAD) yang boleh mengurai kawasan rumit ke dalam kesatuan rantau mudah (Arnon, et al., 1984; Brown, 2001). Algoritma ini memerlukan rantau tersebut dijelas oleh ketaksamaan polinomial (Arnon, et al., 1984; Brown, 2001). Menurut sejarah, algoritma CAD diguna bagi menyelesaikan masalah penghapusan kuantiti (*quantifier elimination*) (Caviness & Johnson, 1998). Bagi penggunaan algoritma penghapusan kuantiti dalam masalah kejuruteraan, sila lihat (Hong, et al., 1997; Sawada & Yan, 2004). Bagi algoritma CAD yang baharu, sila lihat (Dolzmann & Weispfenning, 2000).

Matlamat utama kajian ini ialah mengatur cara bahan dalam kertas kerja ini bagi membantu pelajar mempelajari kalkulus vektor (Yaacob, 2007; Yaacob, Wester & Steinberg, 2010). Aturcara tersebut dilaksana mengguna Mathematica. Justeru, kajian ini melaksana idea berkenaan ke dalam sistem ini. Mathematica berupaya menilai kamiran rantau dan isipadu mengguna prosedur berdasarkan Strzebonski (2000; 2005). Bagaimanapun, sebagai alat bantuan pelajar, beberapa nilai hasil perantaraan perlu diketahui. Namun, sistem sedia ada tidak menyediakan kemudahan tersebut dan tidak dapat menentu kamiran terhadap sempadan kawasan. Justeru, kajian ini kembali kepada idea yang dipersembah dalam McCallum (1993; Strzebonski, 2000) bagi membina alat kalkulus vektor.

2. KAMIRAN

Jika R ialah kawasan dan C ialah lengkung dalam satah dua dimensi, ahli matematik menulis kamiran yang dikaji sebagai:

$$\int_R f = \iint_R f(x, y) dx dy, \int_C g = \int g(\xi) \frac{ds}{d\xi} d\xi, \quad (2.1)$$

dengan x dan y ialah pembolehubah nyata, f ialah fungsi bernilai nyata yang tertakrif pada kawasan, g ialah fungsi bernilai nyata bagi pembolehubah nyata, s ialah pembolehubah panjang lengkok pada lengkung dan ξ ialah parameter. Jika Ω ialah isipadu dan S ialah permukaan dalam ruang tiga dimensi, maka kamiran yang dikaji adalah dalam bentuk:

$$\int_\Omega f = \iiint_\Omega f(x, y, z) dx dy dz, \int_S h = \iint h(\xi, \eta) J(x, y, z; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.2)$$

dengan x, y dan z ialah pembolehubah nyata, f ialah fungsi nilai nyata yang tertakrif dalam isipadu, h ialah fungsi nilai nyata bagi dua pembolehubah nyata, J ialah unsur kawasan permukaan, dan ξ dan η ialah parameter. Tumpuan diberi pada lengkung bagi sempadan kawasan, $C = \partial R$ dan permukaan bagi sempadan isipadu, $S = \partial \Omega$.

Kamiran terhadap kawasan satah disusut kepada jumlah kamiran terlelar, sementara kamiran terhadap lengkung disusut kepada jumlah kamiran terhadap selang. Dalam tiga dimensi, kamiran ke atas isipadu disusut kepada jumlah kamiran bersepadu ganda tiga, kamiran terhadap permukaan kepada jumlah kamiran lelaran berganda. Kebanyakan SAK boleh menilai kamiran yang dihasilkan. Kamiran ditulis sebagai jumlah kamiran mudah dengan menulis kawasan atau isipadu sebagai kesatuan kawasan mudah atau isipadu yang mana kamiran terhadap setiap bahagian ditulis sebagai kamiran lelaran atau kamiran ke atas selang.

Untuk mencapai matlamat kajian, beberapa fakta asas tentang kamiran perlu diguna. Pertama, kamiran terhadap set berdimensi lebih rendah adalah sifar. Bagi kamiran isipadu, menambah atau menyingkir permukaan, lengkung atau titik daripada isipadu tidak mengubah nilai kamiran tersebut. Bagi kamiran terhadap kawasan dalam satah atau permukaan dalam tiga dimensi, menambah atau menyingkir lengkung dan titik tidak memberi kesan kepada nilai kamiran. Akhir sekali, bagi lengkung, menambah atau menyingkir titik tidak mengubah nilai.

Bagi penggunaan yang melibatkan teorem Green atau teorem Kecapahan, adalah menjadi kebiasaan bagi menganggap rantau adalah tidak remeh dan mengandungi sempadan. Secara rasminya, kajian menganggap kawasan tersebut memenuhi keperluan yang dikehendaki.

$$\text{cloint } R = R,$$

dengan clo bermaksud penutupan dan int bermaksud set bahagian dalam. Adalah penting sempadan terdiri daripada nombor terhingga cebis licin.

Satu lagi fakta yang kritikal ialah jika R adalah kesatuan set tidak bercantum, iaitu K ialah integer positif dan

$$R = \cup_{k=1}^K S_k, \tag{2.3}$$

dengan

$$\text{int } S_j \cap \text{int } S_k = \emptyset, \quad 1 \leq j, k \leq K,$$

dan \emptyset ialah set kosong, maka

$$\int_R f = \sum_{k=1}^K \int_{S_k} f.$$

Keadaan bagi kamiran sempadan lebih rumit kerana sempadan diorientasi. Jika S_j dan S_k mempunyai bahagian sempadan sepunya, maka orientasi bahagian tersebut harus bertentangan, dan dengan itu bukan sebahagian daripada sempadan R serta boleh disingkir daripada pengiraan sempadan. Melalui pemahaman ini:

$$\partial R = \cup_{k=1}^K \partial S_k .$$

Operasi ini lazimnya ditulis sebagai jumlah dan bukan kesatuan bagi menunjukkan bahagian dengan orientasi bertentangan dibatal. Pemudahan ini memberi:

$$\partial R = \cup_{j=1}^J C_j ,$$

dengan J ialah integer positif, C_j ialah lengkung diorientasi dan C_j tidak bercantum. Maka

$$\int_{\partial R} g = \sum_{j=1}^J \int_{C_j} g .$$

Pemudahan tidak perlu bagi beberapa kamiran sempadan yang penting namun ia dapat menyusut jumlah pengiraan yang diperlu bagi mencari kamiran tersebut.

3. KAWASAN DAN ISIPADU

Kajian menganggap kawasan dan isipadu boleh diterang oleh nombor terhingga polinomial. Ini merangkumi kebanyakan masalah daripada kalkulus vektor, tetapi bukan kawasan yang diterang oleh logaritma, eksponen, trigonometri, atau lebih kepada fungsi umum. Lebih tepat, set dianggap aljabbar separa, iaitu kawasan R ditakrif oleh

$$R = \{(x, y) : F(x, y) \text{ benar}\},$$

dengan $F(x, y)$ ialah formula logik terhingga yang melibatkan hanya polinomial nyata dalam pembolehubah nyata x dan y . Andaikan isipadu Ω ditakrif oleh

$$\Omega = \{(x, y, z) : F(x, y, z) \text{ benar}\},$$

dengan $F(x, y, z)$ ialah formula logik terhingga yang melibatkan hanya polinomial nyata dalam pembolehubah nyata x, y dan z . Formula logik boleh mengguna mana-mana daripada $\leq, \geq, <, >$ dan $=$ untuk menggabung dua polinomial dan **penafian**(\neg), **dan**(\wedge), dan **atau**(\vee) dalam pembentukan formula logik. Contohnya,

$$x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2$$

mendefinisi anulus seperti ditunjuk dalam Rajah 1. Teorem asas dalam logik menyatakan sebarang formula boleh ditulis sebagai \vee bagi sebutan nombor terhingga yang terdiri daripada \wedge bagi sebutan nombor terhingga, iaitu set ialah kesatuan persilangan set dengan setiap set diberi oleh persamaan atau ketaksamaan polinomial.

CAD berkeupayaan tinggi (Caviness & Johnson, 1998; Collins & Hong, 1991) mengurai set aljabbar separa umum kepada kesatuan set mudah yang dipanggil silinder

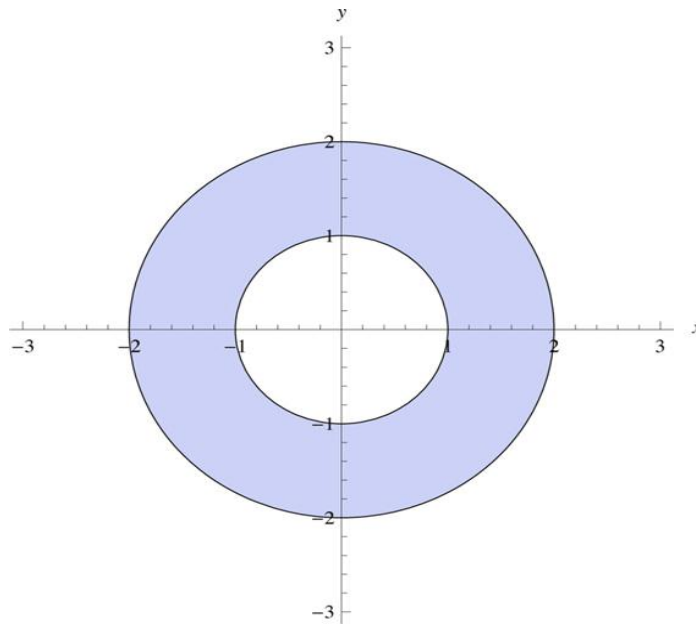
dalam susastera pengiraan geometri aljabar. Bagaimanapun, kajian tidak berminat dalam set aljabar separa umum, tetapi hanya set bahagian dalaman yang tertutup. Mathematica menyedia dua fungsi CAD:

Cylindrical Decomposition, (diringkas sebagai CD); Generic Cylindrical Decomposition, (diringkas sebagai GCD)

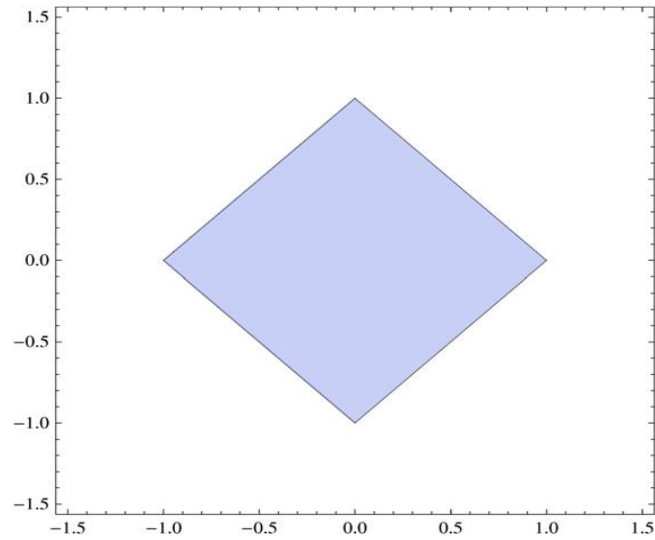
Kedua-duanya tidak dapat melakukan dengan tepat apa yang dikehendaki, seperti dua contoh ilustrasi berikut:

Pertimbang rantau D yang ditakrif oleh formula:

$$D(x,y) = x + y \geq -1, x - y \geq -1, x - y \leq 1, x + y \leq 1, \quad (3.1)$$



Rajah 1: Anulus



Rajah 2: Berlian

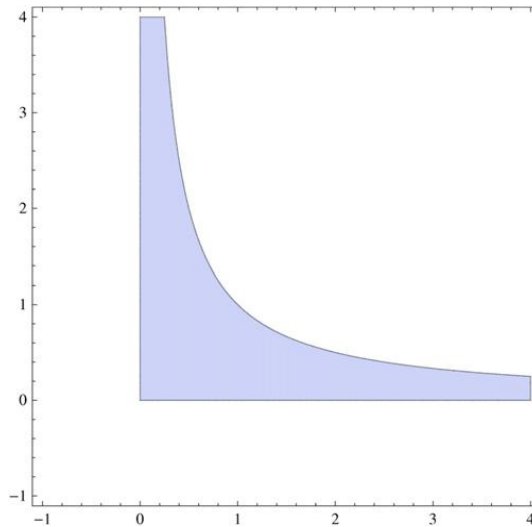
menjelas set tertutup ialah berlian dalam Rajah 2. Kamiran fungsi f ke atas rantau ialah:

$$\int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{x+1} f(x,y) dy dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{-x+1} f(x,y) dy dx \quad (3.2)$$

Jika mengguna CD bagi formula (3.1) untuk D , didapati:

$$\begin{aligned} & (x = -1, y = 0) \cdot (-1 < x \leq 0, -x-1 \leq y \leq x+1) \\ & \cdot (0 < x < 1, x-1 \leq y \leq 1-x) \cdot (x = 1, y = 0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

yang mana senarai dua titik sudut sebagai silinder berasingan. Kajian ini boleh menyingkir sebutan yang mengandungi = sebagai kamiran satah ke atas titik iaitu sifar. Perhati segmen garis tegak yang mana sebahagian daripada $x = 0$ disenarai sebagai sebahagian daripada salah satu segi tiga, tetapi tidak bagi yang lain.



Rajah 3: Rantau tidak terbatas

Jika menggunakan prinsip $\geq \rightarrow >$ dan $\leq \rightarrow <$ kepada formula (3.1) untuk D dan kemudian menggunakan CD kepada keputusan, hasil yang diperoleh:

$$(-1 < x \leq 0 \wedge -x - 1 < y < x + 1) \vee (0 < x < 1 \wedge x - 1 < y < 1 - x),$$

dengan menyingkir persamaan daripada (3.3). Sebagai alternatif, jika menggunakan GCD dan kemudian mengambil bahagian pertama jawapan tersebut, hasil yang diperolehi:

$$(-1 < x < 0 \wedge -x - 1 < y < x + 1) \vee (0 < x < 1 \wedge x - 1 < y < 1 - x),$$

Ini adalah subset bahagian dalaman D dengan sifat tertutup masih lagi D . Sebarang hasil dengan mudah boleh diterjemah kepada kamiran dalam (3.2), tetapi kajian lebih berminat dengan bentuk akhir kerana simetrinya, dengan tidak ada bahagian $x = 0$ dimasukkan dalam jawapan.

Silinder bagi rantau tidak terbatas mempunyai bentuk aljabar yang berbeza daripada rantau terbatas. Kamiran ke atas rantau sedemikian dipanggil sebagai tidak wajar. Pertimbang rantau tidak terbatas tertutup:

$$xy \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \tag{3.4}$$

ditunjuk dalam Rajah 3. Daripada CD, diperoleh:

$$(x = 0 \wedge y \geq 0) \vee \left(x > 0 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right),$$

sementara itu, daripada dua kaedah yang lain, diperoleh:

$$x > 0 \wedge 0 < y < \frac{1}{x},$$

yang mudah diterjemah kepada kamiran:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy dx.$$

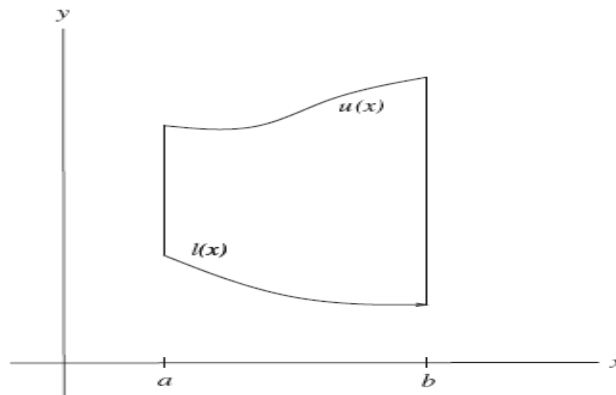
Adalah biasa mengguna:

$$0 \leq x \wedge 0 \leq y \leq 1/x,$$

bagi menanda kawasan yang diberi dalam (3.4).

Dalam pengaturcaraan, menulis silinder dalam bentuk terbuka adalah yang terbaik. Semua silinder sedemikian boleh ditulis dalam bentuk:

$$a < x < b \wedge l(x) < y < u(x), \tag{3.5}$$



Rajah 4: Kotak digeneralisasi (silinder)

yang a dan b memperkembang nombor nyata dan l dan u ialah fungsi licin dengan nilai dalam nombor nyata yang dikembang. Salah satu contoh yang penting ialah satah penuh:

$$-\infty < x < +\infty \wedge -\infty < y < +\infty.$$

Nota pelaksanaan: Setakat yang diketahui, tidak ada perbezaan yang ketara mengenai kaedah mana yang diguna bagi mencari CAD. Bagi menterjemah silinder kepada kamiran, ungkapan dibuat dalam bentuk terbuka. Terdapat banyak kes khas melibatkan CD dan CGD tidak mengungkap silinder dalam bentuk yang tepat seperti dalam (3.5). Contohnya satah separa, yang mana mempunyai CAD $0 \leq x$, dan satah penuh yang diberi di atas, yang mempunyai CAD iaitu perkataan Benar. Terdapat banyak kes khas seperti ini yang mesti diprogram secara individu. Contoh bahagian luaran bulatan dan bahagian luar segi empat, seperti di bawah, mengilustrasi kekompleksan tersebut.

Nota pelaksanaan: Oleh kerana kami mengguna hasil kajian ini sebagai sebahagian daripada bantuan pelajar, maka pelajar dibenar mengguna formula algebra separa umum. Untuk pelajar, kajian membangun fungsi OurForm yang pertama mengguna arahan Mathematica

LogicalExpand bagi mengungkap formula dalam bentuk piawai sebagai kesatuan persilangan set dengan semua penafian (\neg) disingkir. Sebarang persilangan yang mengandungi = dibatal bagi mengambar set ukuran sifar. Kajian mengungkap silinder dalam bentuk tertutup bagi paparan pelajar. Semua ketaksamaan ditulis dengan salah satu sebutan sifar. Bagaimanapun, $P \geq 0$ adalah sama seperti $-P \leq 0$, oleh itu hanya perlu mengguna salah satu \leq atau \geq dalam formula.

4. CONTOH DUA DIMENSI

Pertimbang dua pembolehubah, silinder menghasil kotak (dipanggil kotak dan ditandai oleh B) mempunyai dua sisi lurus dan lengkung atas dan bawah seperti diilustrasi dalam Rajah 4. Formula bagi bahagian dalaman kotak tersebut ditulis dalam bentuk:

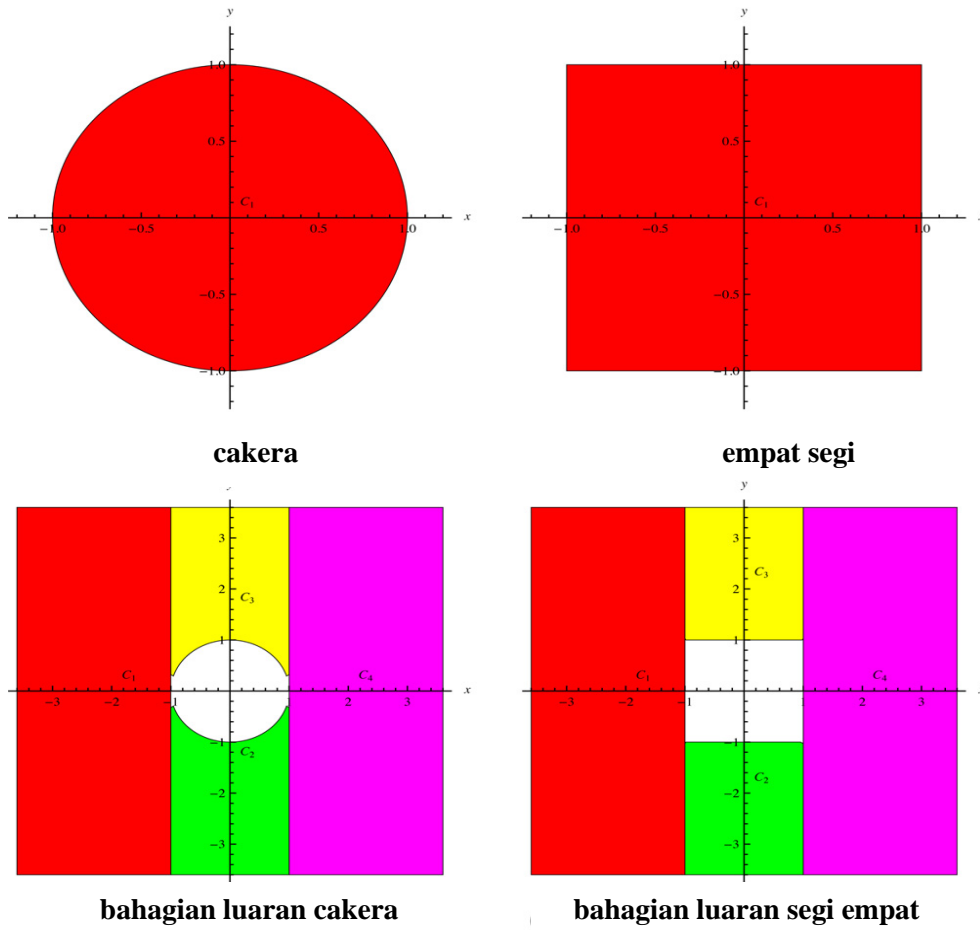
$$B(x, y) = a < x < b \wedge l(x) < y < u(x) \quad (4.1)$$

yang a dan b sama ada pemalar nyata atau $a = -\infty$ atau $b = +\infty$, dan $l(x)$ dan $u(x)$ ialah fungsi nilai nyata yang berterusan pada selang (a, b) atau $l(x) = -\infty$ atau $u(x) = +\infty$. Paling penting, $a < b$ dan $l(x) < u(x)$. Kesimpulannya, jika R dianggap sebagai set separa aljabar dalam satah memuaskan clo int $R=R$, maka R diurai kepada kesatuan kotak tidak bercantum:

$$R = \cup_{k=1}^K B_k, \quad (4.2)$$

yang $K > 0$ ialah integer.

Sebagai contoh, kajian tidak menganggap kawasan diberi adalah terbuka atau tertutup. Dalam menyelesaikan contoh, kajian mengubah suai kepada perwakilan tertutup bagi persembahan dan perwakilan terbuka bagi pengiraan.



Rajah 5: Kotak bagi bulatan dan empat segi beserta pelengkap.

4.1 Contoh Mudah

Contoh mudah bagi kawasan diberi oleh cakera, segi empat dan pelengkap (lihat Rajah 5). Cakera dan segi empat kedua-duanya menghasilkan kotak, sementara pelengkapnya ialah kesatuan empat kotak. Cakera tertutup diberi oleh formula:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1,$$

sementara segi empat tertutup diberi oleh formula:

$$F(x, y) = x \geq -1 \wedge x \leq 1 \wedge y \geq -1 \wedge y \leq 1.$$

Dua kawasan ini adalah kotak: bagi cakera, kotak tertutup diberi oleh

$$B(x, y) = -1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, \tag{4.3}$$

sementara bagi segi empat, kotak tertutup ialah

$$B(x, y) = -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1. \quad (4.4)$$

Bahagian luaran cakera tertutup ialah set terbuka diberi oleh formula:

$$\neg(x^2 + y^2 \leq 1) = x^2 + y^2 > 1.$$

Penutupan diberi oleh

$$F(x, y) = x^2 + y^2 \geq 1.$$

Pelengkap bagi segi empat adalah lebih menarik. Ia adalah set terbuka yang dijelas oleh formula:

$$\neg(x \geq -1 \wedge x \leq 1 \wedge y \geq -1 \wedge y \leq 1),$$

yang boleh dikembang kepada:

$$x < -1 \vee x > 1 \vee y < -1 \vee y > 1.$$

Formula bagi penutupan kawasan ini ialah

$$F(x, y) = x \leq -1 \vee x \geq 1 \vee y \leq -1 \vee y \geq 1,$$

Kotak tertutup bagi pelengkap cakera ialah

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &= -\infty < x \leq -1 \wedge -\infty < y < \infty, \\ B_2(x, y) &= -1 \leq x \leq 1 \wedge -\infty < y \leq -\sqrt{1-x^2}, \\ B_3(x, y) &= -1 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{1-x^2} \leq y < \infty, \\ B_4(x, y) &= 1 \leq x < \infty \wedge -\infty < y < \infty. \end{aligned} \quad (4.5)$$

sementara kotak tertutup bagi pelengkap segi empat ialah

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &= -\infty < x \leq -1 \wedge -\infty < y < \infty, \\ B_2(x, y) &= -1 \leq x \leq 1 \wedge -\infty < y \leq -1, \\ B_3(x, y) &= -1 \leq x \leq 1 \wedge 1 \leq y < \infty, \\ B_4(x, y) &= 1 \leq x < \infty \wedge -\infty < y < \infty. \end{aligned} \quad (4.6)$$

5. KAMIRAN SATAH DAN KOTAK

Algoritma CAD yang diubah suai menulis kawasan sebagai kesatuan tidak bercantum bagi penutupan kotak terbuka (4.2). Penggunaannya dengan jelas memberi kamiran fungsi ke atas rantau sebagai jumlah kamiran terlelar ke atas kotak. Kajian turut menulis kamiran ke atas sempadan kawasan sebagai jumlah kamiran ke atas selang, lantas boleh mengguna teorem Green bagi kamiran tersebut.

Bahagian dalam kotak B mempunyai formula dalam bentuk (4.1):

$$B(x, y) = a < x < b \wedge l(x) < y < u(x).$$

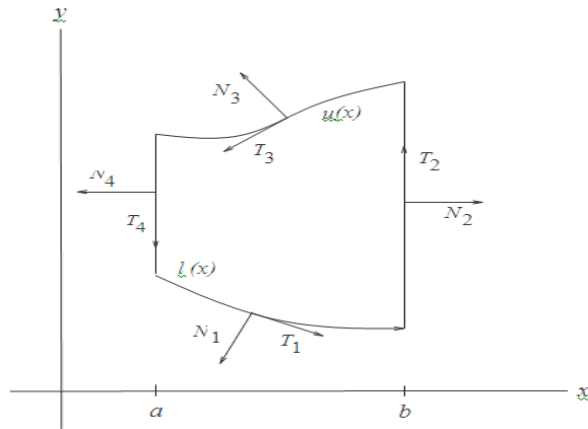
Kamiran bagi fungsi $f = f(x, y)$ ke atas kotak diberi oleh

$$\int_B f = \int_a^b \int_{l(x)}^{u(x)} f(x, y) dy dx.$$

5.1 Contoh

Seperti yang dinyatakan sebelum ini, bulatan dan segi empat ditunjuk dalam Rajah 5 adalah kotak dijelas oleh formula (4.3) dan (4.4). Biasanya, kamiran mudah ke atas bulatan terbaik dibuat dalam koordinat polar, tetapi kaedah yang diguna berfungsi secara langsung pada perwakilan Cartesian. Kamiran f ke atas kawasan ini diberi oleh

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx \text{ dan } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dy dx$$



Rajah 6: Tangen dan normal bagi kotak

Bahagian luaran bulatan dan segi empat adalah kesatuan tidak bercantum empat kotak seperti yang diberi oleh (4.5) dan (4.6). Kamiran f ke atas bahagian luaran ini ialah

$$\int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} f(x, y) dy dx + \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx,$$

dan

$$\int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{-1} f(x, y) dy dx$$

$$\int_{-1}^1 \int_1^{\infty} f(x, y) dy dx + \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx,$$

5.2 Sempadan Kotak

Secara umum, jika lengkung diparameter oleh ξ , $0 \leq \xi \leq 1$, maka vektor tangen pada lengkung dalam arah meningkat ξ diberi oleh

$$\vec{T}(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi)).$$

Kadar perubahan panjang lengkok terhadap ξ diberi oleh

$$\frac{ds}{d\xi} = \|\vec{T}(\xi)\| = \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2}.$$

Tangen unit diberi oleh

$$\vec{t}(\xi) = \frac{(x'(\xi), y'(\xi))}{ds/d\xi}.$$

Sempadan bagi kotak diterang dalam (4.1) berorientasi dalam arah berlawanan jam seperti yang ditunjuk dalam Rajah 6 dan secara umumnya diberi oleh empat lengkung:

$$\begin{aligned} C_1 &= (x, l(x)), & a \leq x \leq b, & & \text{berorientasikan} \rightarrow \\ C_2 &= (b, y), & l(b) \leq y \leq u(b), & & \text{berorientasikan} \uparrow \\ C_3 &= (x, u(x)), & a \leq x \leq b, & & \text{berorientasikan} \leftarrow \\ C_4 &= (a, y), & l(a) \leq y \leq u(a), & & \text{berorientasikan} \downarrow \end{aligned} \quad (5.1)$$

Kemungkinan bagi kes $l(a) = u(a)$ dan/atau $l(b) = u(b)$, yang menyingkir C_2 dan/atau C_4 . Begitu juga sekiranya mana-mana $a = -\infty$, $b = +\infty$, $l(x) \equiv -\infty$ atau $u(x) \equiv +\infty$ dipenuhi, maka lengkung yang melibatkan pemboleh ubah tidak terhingga tidak wujud. Justeru, sempadan kotak ditakrif oleh empat segmen yang membentuknya.

Memparameter lengkung sempadan melintang mengguna x dan menegak mengguna y adalah mudah. Bagaimanapun, parameter mengesan lengkung C_3 dan C_4 pada arah yang salah. Ini tidak menjadi masalah jika tangen dan normal dipilih dalam arah yang betul (lihat Lampiran A). Tangen pada lengkung sempadan dalam (5.1) dipilih dalam arah berorientasi lengkung, sementara titik vektor normal dalam arah keluar daripada kawasan diberi oleh $\vec{N} = \vec{T} \times \vec{k}$, yang mana \vec{k} ialah unit normal bagi satah $x - y$. Sekiranya tatatanda prima melambang perbezaan terhadap x atau y , maka tangen, vektor normal, dan perbezaan panjang lengkok bagi lengkung (5.1) diberi oleh (lihat Rajah 6):

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= (1, l'(x)), & \vec{N}_1 &= (l'(x), -1), & \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + l'(x)^2}, \\ \vec{T}_2 &= (0, 1), & \vec{N}_2 &= (1, 0), & \frac{ds}{dy} &= 1, \\ \vec{T}_3 &= (-1, -u'(x)), & \vec{N}_3 &= (-u'(x), 1), & \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + u'(x)^2}, \\ \vec{T}_4 &= (0, -1), & \vec{N}_4 &= (-1, 0), & \frac{ds}{dy} &= 1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nota pelaksanaan: Sempadan diwakili oleh dua senarai, setiap satu mengandungi dua lengkung. Senarai tersebut adalah segmen melintang yang diparameter oleh x :

$$\{a \leq x \leq b, y = l(x), \vec{T}_1, \vec{N}_1\} \text{ dan } \{a \leq x \leq b, y = u(x), \vec{T}_3, \vec{N}_3\}, \quad (5.3)$$

dan segmen menegak yang diparameter oleh y :

$$\{x = b, l(b) \leq y \leq u(b), \vec{T}_2, \vec{N}_2\} \text{ dan } \{x = a, l(a) \leq y \leq u(a), \vec{T}_4, \vec{N}_4\}. \quad (5.4)$$

5.3 Sempadan Kawasan

Bagi kawasan kesatuan kotak, isu kritikal ialah pemudahan kesatuan sempadan kotak yang membentuk rantau. Kajian bermula dengan mencari sempadan bagi contoh terdahulu.

Sempadan bagi cakera ditunjuk dalam Rajah 5 mempunyai dua bahagian sahaja (bukan empat bahagian) kerana $l(-1) = u(-1)$ dan $l(1) = u(1)$. Mengguna format (5.3), sempadan ialah

$$\left\{ -1 \leq x \leq 1, y = -\sqrt{1-x^2}, \left(1, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1\right) \right\},$$

$$\left\{ -1 \leq x \leq 1, y = -\sqrt{1-x^2}, \left(-1, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 1\right) \right\}.$$

Sempadan bagi segi empat mempunyai empat bahagian dan diberi oleh

$$\begin{aligned} \{-1 \leq x \leq 1, y = -1, & \{1,0\}, \{0,-1\}\}, \\ \{x = 1, -1 \leq y \leq 1, & \{0,1\}, \{1,0\}\}, \\ \{-1 \leq x \leq 1, y = 1, & \{-1,0\}, \{0,1\}\}, \\ \{x = -1, -1 \leq y \leq 1, & \{0,-1\}, \{-1,0\}\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

mengguna format (5.3) dan (5.4).

Sempadan kotak yang membentuk bahagian luaran kotak (4.6) diberi oleh segmen garis melintang:

$$\begin{aligned} \{-1 \leq x \leq 1, y = -1, & \{-1,0\}, \{0,1\}\}, \\ \{-1 \leq x \leq 1, y = 1, & \{1,0\}, \{0,-1\}\}, \end{aligned}$$

dan segmen garis menegak:

$$\begin{aligned} \{x = -1, -\infty < y \leq -1, & \{0,-1\}, \{-1,0\}\}, \\ \{x = 1, -\infty < y \leq -1, & \{0,1\}, \{1,0\}\}, \\ \{x = -1, -\infty < y \leq \infty, & \{0,1\}, \{1,0\}\}, \\ \{x = -1, 1 \leq y < \infty, & \{0,-1\}, \{-1,0\}\}, \\ \{x = 1, 1 \leq y < \infty, & \{0,1\}, \{1,0\}\}, \\ \{x = 1, -\infty < y < \infty, & \{0,-1\}, \{-1,0\}\}. \end{aligned}$$

Segmen menegak boleh dipermudah. Segmen menegak pertama terdiri daripada:

$$\begin{aligned} \{x = -1, -\infty < y \leq -1, & \{0,1\}, \{1,0\}\}, \\ \{x = -1, -1 \leq y \leq 1, & \{0,1\}, \{1,0\}\}, \\ \{x = -1, 1 \leq y < \infty, & \{0,1\}, \{1,0\}\}. \end{aligned}$$

Segmen pertama tersebut dan segmen menegak pertama adalah

$$\begin{aligned} \{x = -1, & \quad -\infty < y \leq -1, & \quad \{0,1\}, \quad \{1,0\}\}, \\ \{x = -1, & \quad -\infty < y \leq -1, & \quad \{0,-1\}, \quad \{-1,0\}\}, \end{aligned}$$

Persamaan dibatal kerana dua kemasukan yang pertama adalah sama, tetapi tangen (dan oleh itu normal) adalah bertentangan arah. Mengulangi sebanyak tiga kali lagi memberi sempadan bahagian luaran segi empat seperti di atas (5.5).

Prinsip pemudahan umum merupakan dua segmen menegak yang mempunyai orientasi bertentangan iaitu, vektor tangen adalah dalam arah bertentangan, maka ia dibatal dan disingkir daripada sempadan. Kesukaran ialah memahami bagaimana memecah segmen bagi pembatalan yang lengkap. Algoritma CAD tidak menghasilkan segmen melintang yang perlu dipermudah. CAD bagi kawasan berbentuk L iaitu kesatuan tiga kotak yang disusun secara bertingkat:

$$\begin{aligned} x \geq 0 \wedge x \leq 1 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 1 \vee \\ x \geq 1 \wedge x \leq 2 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 1 \vee \\ x \geq 0 \wedge x \leq 1 \wedge y \geq 1 \wedge y \leq 2, \end{aligned}$$

dianalisis dalam Mathematica *notebook* bagi mengambar titik tersebut.

Sila perhati sempadan luar segi empat yang mempunyai orientasi bertentangan daripada segi empat tersebut. Ini merupakan kes bagi kesatuan segi empat dan bahagian luar untuk satah penuh yang mempunyai sempadan kosong. Hasilnya sempadan bahagian dalam dan luar mesti dibatal. Keputusan bahagian luar bulatan adalah serupa.

Nota pelaksanaan: Dalam Mathematica, segmen sempadan dipersembah oleh dua senarai; (5.4) mempamer segmen menegak manakala (5.3) mempamer segmen melintang. Kemasukan vektor tangen memudah untuk memeriksa sekiranya dua segmen mempunyai orientasi bertentangan. Prinsip pemudahan bagi segmen menegak dalam satu *Mathematica notebook* dilaksana.

5.4 Kamiran ke atas Sempadan Kotak dan Kawasan

Bagi segmen melintang kotak ditunjuk dalam Rajah 6, kamiran panjang lengkok, formula kedua dalam (2.1) dengan $\xi = x$, $g(\xi)$ diganti dengan $f(x, y(x))$, dan mengguna (5.2), menjadi:

$$\int_a^b f(x, l(x)) \sqrt{1 + l'(x)^2} dx \text{ dan } \int_a^b f(x, u(x)) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx.$$

Bagi segmen menegak, dengan $\xi = y$, formula tersebut menjadi:

$$\int_{l(a)}^{u(a)} f(a, y) dy \text{ dan } \int_{l(b)}^{u(b)} f(b, y) dy$$

sekiranya lengkung diparameter oleh y . Jikaf $\equiv 1$, maka kamiran tersebut memberi panjang lengkung C . Bagi mencari panjang sempadan, kesatuan sempadan kotak diberi oleh CAD kawasan tersebut harus dipermudah dan prinsip di atas diguna dalam baki segmen.

Dalam aplikasi penting, kamiran lengkung melibatkan hasil darab dalaman medan vektor dengan tangen unit atau normal bagi lengkung. Dalam masalah ini, kuantiti yang dikamir mengandungi salah satu daripada persamaan di bawah

$$\vec{t}(\xi) \frac{ds}{d\xi} = (x'(\xi), y'(\xi)) = \vec{T}(\xi), \vec{n}(\xi) \frac{ds}{d\xi} = (y'(\xi), -x'(\xi)) = \vec{N}(\xi).$$

Contoh, jika $\vec{V}(x, y)$ ialah medan daya, maka kerja yang dijalankan dalam menggerak objek unit jisim sepanjang lengkung C ialah

$$W = \int_C \vec{V} \cdot \vec{t} ds = \int_0^1 \vec{V} \cdot \vec{T} d\xi = \int_0^1 \vec{V}(x(\xi), y(\xi)) \cdot \vec{T}(\xi) d\xi.$$

Begitu juga, jika \vec{V} ialah medan halaju bagi menggerak zarah, maka fluk melalui lengkung ialah

$$F = \int_C \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 \vec{V} \cdot \vec{N} d\xi = \int_0^1 \vec{V}(x(\xi), y(\xi)) \cdot \vec{N}(\xi) d\xi.$$

Bagi kotak (4.1), kamiran fluk dan kerja diberi oleh

$$W = \sum_{i=1}^4 W_i, F = \sum_{i=1}^4 F_i,$$

dengan

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_a^b \vec{V}(x, l(x)) \cdot (1, l'(x)) dx. & F_1 &= \int_a^b \vec{V}(x, l(x)) \cdot (l'(x), -1) dx, \\ W_2 &= \int_{l(b)}^{u(b)} \vec{V}(b, y) \cdot (0, 1) dy & F_2 &= \int_{l(b)}^{u(b)} \vec{V}(b, y) \cdot (1, 0) dy, \\ W_3 &= \int_a^b \vec{V}(x, u(x)) \cdot (-1, -u'(x)) dx. & F_3 &= \int_a^b \vec{V}(x, u(x)) \cdot (-u'(x), 1) dx, \\ W_4 &= \int_{l(a)}^{u(a)} \vec{V}(a, y) \cdot (0, -1) dy & F_4 &= \int_{l(a)}^{u(a)} \vec{V}(a, y) \cdot (-1, 0) dy. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Bagi kawasan kesatuan kotak, tidak perlu untuk memudah kesatuan segmen sempadan, kerana formula ini adalah linear dalam vektor normal atau tangen, yang menyebabkan kamiran terhadap dua lengkung dengan orientasi bertentangan dibatal.

5.5 Contoh Bersambung

Bagi segi empat (4.4), jika memilih $\vec{V} = (x, y)/2$, maka kamiran kerja adalah

$$W_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x, -1)}{2} \cdot (1, 0) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{2} dx = 0$$

$$W_2 = \int_{-1}^1 \frac{(1,y)}{2} \cdot (0,1)dy = \int_{-1}^1 \frac{y}{2} dy = 0$$

$$W_3 = \int_{-1}^1 \frac{(x,1)}{2} \cdot (-1,0)dx = \int_{-1}^1 -\frac{x}{2} dx = 0$$

$$W_4 = \int_{-1}^1 \frac{(-1,y)}{2} \cdot (0,-1)dy = \int_{-1}^1 -\frac{y}{2} dy = 0.$$

Oleh itu, $W = 0$. Medan vektor \vec{V} ialah konservatif, maka tenaga menggerak objek sekeliling laluan tertutup dalam medan vektor konservatif perlu sifar. Kamiran fluk ialah

$$F_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x,-1)}{2} \cdot (0,-1)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1$$

$$F_2 = \int_{-1}^1 \frac{(1,y)}{2} \cdot (1,0)dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dy = 1$$

$$F_3 = \int_{-1}^1 \frac{(x,1)}{2} \cdot (0,1)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1$$

$$F_4 = \int_{-1}^1 \frac{(-1,y)}{2} \cdot (-1,0)dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dy = 1.$$

Hasilnya $F = 4$. Ia adalah kawasan segi empat yang tidak secara kebetulan seperti yang akan dilihat dalam bahagian seterusnya. Keterangan lanjut dipamer dalam Mathematica *notebook*.

5.6 Teorem Green

Bagi mana-mana rantau R , jika $V = (V_1, V_2)$, maka teorem Green melibatkan:

$$W = \int_R \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad F = \int_R \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Dalam tiga dimensi, ini dikenali sebagai teorem Stokes dan teorem kecapahan. Jika memilih \vec{V} supaya

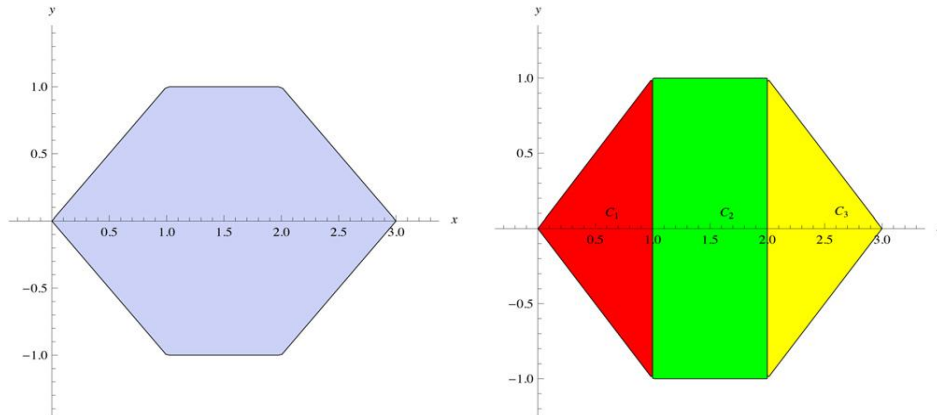
$$-\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 1,$$

maka kamiran kerja memberi kawasan rantau R . Pilihan yang tepat ialah $\vec{V} = (-y, x)/2$. Begitu juga jika memilih \vec{V} agar

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 1,$$

maka F memberi kawasan rantau R . Pilihan yang tepat ialah $\vec{V} = (x, y)/2$. Ini menjelaskan jawapan kepada contoh akhir dalam bahagian sebelum ini. Pemerhatian ini adalah asas bagi

pembentukan peranti dipanggil *planimeter* yang memberi kawasan rantau kompleks dengan mengesan sempadan tersebut.



Rajah 7: Heksagon

Nota pelaksanaan: Kajian ini menggunakan hasil teorem Green bagi menguji algoritma untuk menilai kamiran. Ini berguna bagi memeriksa prinsip pemudahan sempadan.

6. LANJUTAN CONTOH DUA DIMENSI

Dalam bahagian ini, kajian menunjukkan kekuatan algoritma beserta beberapa contoh kompleks. Contoh pertama menggunakan heksagon dibincang dalam (Yaacob, Wester & Steinberg, 2010). Kajian menyediakan butiran terperinci mengenai apa yang dikira oleh *Mathematica notebook*. Bagi contoh lain, kajian hanya mempersembahkan bahagian yang paling menarik daripada apa yang telah dikira.

6.1 Heksagon

Heksagon dalam Rajah 7 dapat ditakrif menggunakan enam ketidaksamaan linear:

$$R = \{(x, y): y \geq -x \wedge y \leq x \wedge y \geq -1 \wedge y \leq 1 \wedge y \geq x - 3 \wedge y \leq 3 - x\}.$$

Oleh kerana heksagon ialah gabungan dua segi tiga dan segi empat tepat, kawasan tersebut mudah dilihat menjadi 4 dan panjang sempadan ialah $2 + 4\sqrt{2}$. Kajian menggunakan algoritma CAD untuk mencari kawasan dan panjang sempadan. Juga, mencari sentroid yang mana dengan melalui simetri adalah $(x, y) = (3/2, 0)$. Kajian mendapat fluk dan kamiran sempadan kerja dan kemudian menggunakannya bagi memeriksa hasil teorem Green untuk rantau pengiraan.

Kotak dalam CAD bagi heksagon ditunjuk dalam Rajah 7 dan diberi oleh

$$B_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge -x \leq y \leq x\},$$

$$B_2 = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 1\},$$

$$B_3 = \{(x, y): 2 \leq x \leq 3 \wedge x - 3 \leq y \leq 3 - x\}.$$

Kamiran bagi fungsi f terhadap heksagon diberi oleh

$$I(f) = \int_0^1 \int_{-x}^x f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_{-1}^1 f(x,y)dydx + \int_2^3 \int_{x-3}^{3-x} f(x,y)dydx.$$

Kawasan dan detik x dan y bagi rantau diberi oleh

$$A = I(1) = 4, \quad M_x = \frac{I(x)}{A} = \frac{3}{2}, \quad M_y = \frac{I(y)}{A} = 0.$$

Senarai segmen sempadan bagi semua kotak mengandungi kemasukan:

$$\{x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \{0,1\}, \quad \{1,0\}\},$$

$$\{x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \{0,-1\}, \quad \{-1,0\}\},$$

$$\{x = 2, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \{0,1\}, \quad \{1,0\}\},$$

$$\{x = 2, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \{0,-1\}, \quad \{-1,0\}\}.$$

Ini perlu dikeluarkan daripada senarai kerana pasangan segmen yang sama dengan vektor tangen menunjuk arah berlawanan. Setelah dipermudah, sempadan menjadi:

$$\{0 \leq x \leq 1, \quad y = -x, \quad \{1,-1\}, \quad \{-1,-1\}\},$$

$$\{0 \leq x \leq 1, \quad y = x, \quad \{-1,-1\}, \quad \{-1,1\}\},$$

$$\{1 \leq x \leq 2, \quad y = -1, \quad \{1,0\}, \quad \{0,-1\}\},$$

$$\{1 \leq x \leq 2, \quad y = 1, \quad \{-1,0\}, \quad \{0,1\}\}.$$

$$\{2 \leq x \leq 3, \quad y = x - 3, \quad \{1,1\}, \quad \{1,-1\}\},$$

$$\{2 \leq x \leq 3, \quad y = 3 - x, \quad \{-1,1\}, \quad \{1,1\}\}.$$

Oleh yang demikian, kamiran sempadan mempunyai enam sebutan. Kamiran panjang lengkok ialah

$$L = 2 \int_0^1 \sqrt{2}g(x)dx + 2 \int_1^2 g(x)dx + 2 \int_2^3 \sqrt{2}g(x)dx.$$

Jika $g(x) \equiv 1$, maka ini memberi panjang sempadan sebagai $2 + 4\sqrt{2}$.

Kamiran kerja ialah

$$W = \int_0^1 (V_1(x, -x) - V_2(x, -x))dx + \int_0^1 (-V_1(x, x) - V_2(x, x))dx + \int_1^2 V_1(x, -1)dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_1^2 -V_1(x, 1)dx + \int_2^3 (V_1(x, x-3) + V_2(x, x-3))dx \\
& \quad + \int_2^3 (-V_1(x, 3-x) + V_2(x, 3-x))dx.
\end{aligned}$$

Bagi mengguna teorem Green, pilih $V_1(x, y) = -y/2$ dan $V_2(x, y) = x/2$ bagi mendapat $W = 4$, rantau bagi heksagon. Kamiran fluk ialah

$$\begin{aligned}
F & = \int_0^1 (-V_1(x, -x) - V_2(x, -x))dx + \int_0^1 (-V_1(x, x) + V_2(x, x))dx + \int_1^2 -V_2(x, -1)dx \\
& + \int_1^2 V_2(x, 1)dx + \int_2^3 (V_1(x, x-3) - V_2(x, x-3))dx \\
& \quad + \int_2^3 (V_1(x, 3-x) + V_2(x, 3-x))dx.
\end{aligned}$$

Seperti kamiran kerja, memilih $V_1(x, y) = x/2$ dan $V_2(x, y) = y/2$ memberi $F = 4$, rantau heksagon.

6.2 Persilangan Dua Bulatan

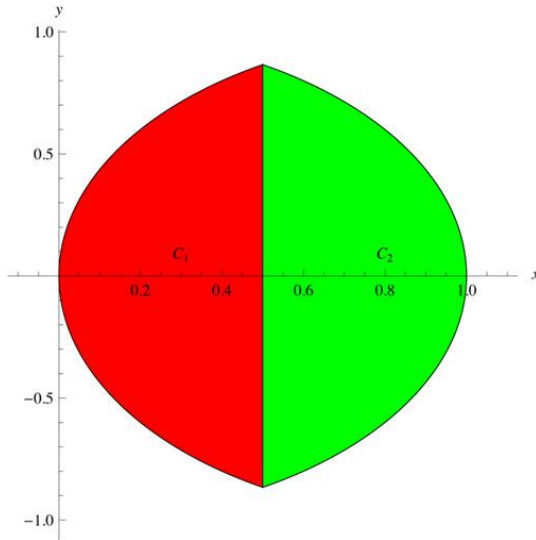
Kotak bagi persilangan dua bulatan:

$$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

diplot dalam Rajah 8. Masalahnya ialah bagi mencari kawasan dan panjang sempadan persilangan. Sahkan hasil kawasan mengguna kedua-dua bentuk teorem Green. Kotak dalam CAD bagi persilangan adalah

$$B_1 = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \wedge -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \right\},$$

$$B_1 = \left\{ (x, y): \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}.$$



Rajah 8: Persilangan dua bulatan

Sempadan diberi oleh

$$\left\{ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad y = -\sqrt{2x - x^2}, \quad \left\{ 1, \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} \right\}, \quad \left\{ \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}, -1 \right\} \right\}$$

$$\left\{ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad y = \sqrt{2x - x^2}, \quad \left\{ -1, \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} \right\}, \quad \left\{ \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}, 1 \right\} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad y = -\sqrt{1-x^2}, \quad \left\{ 1, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\}, \quad \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 \right\} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad y = \sqrt{1-x^2}, \quad \left\{ -1, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\}, \quad \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 1 \right\} \right\}$$

Kawasan diberi oleh

$$A = \int_0^{1/2} \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy dx + \int_{1/2}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

dan panjang sempadan diberi oleh

$$L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{2x-x^2}} dx + 2 \int_{1/2}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \frac{4\pi}{3}.$$

Mengguna kedua-dua versi teorem Green membentuk semula kawasan.

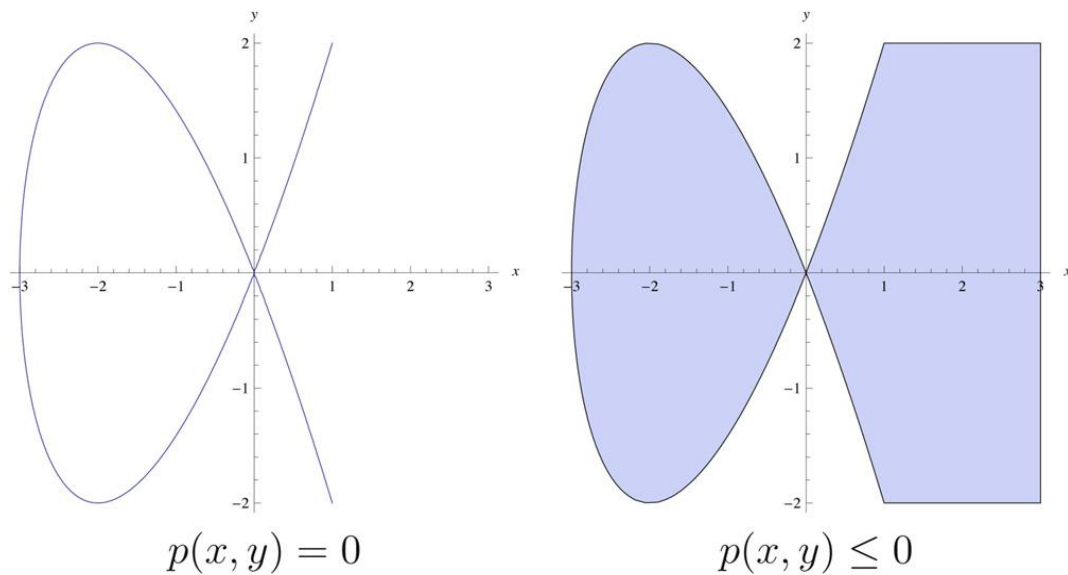
6.3 Lengkung Bersilang Sendiri

Lengkung diberi oleh

$$p(x, y) = y^2 - x^2(x + 3) = 0$$

diplot seperti Rajah 9 dengan tajuk $P(x, y) = 0$. Sebahagian daripada lengkung membatasi rantau dengan kawasan terhingga. Masalahnya ialah mencari kawasan dan panjang sempadan rantau tersebut. Titik $(-2, 0)$ dalam rantau dan $p(-2, 0) = -4 < 0$ oleh itu, perlu melihat pada rantau $p(x, y) \leq 0$ (lihat Rajah 9). Bagi menyingkir bahagian tidak terhingga pada rantau ini dengan $x > 0$, pilih:

$$R = \{(x, y): y^2 - x^2(x + 3) \leq 0 \wedge x \leq 0\}.$$



Rajah 9: Lengkung bersilang sendiri

CAD bagi rantau ini mempunyai hanya satu kotak:

$$-3 \leq x \leq 0 \wedge -\sqrt{x^3 + 3x^2} \leq y \leq \sqrt{x^3 + 3x^2}$$

Kawasan diberi oleh

$$A = \int_{-3}^0 \int_{-\sqrt{x^3+3x^2}}^{\sqrt{x^3+3x^2}} dy dx = \frac{24\sqrt{3}}{5}.$$

sementara panjang diberi oleh

$$L = 2 \int_{-3}^0 \sqrt{1 + \frac{(3x^2 + 6x)^2}{4(x^3 + 3x^2)}} dx \approx 10.7351.$$

Kamiran bagi panjang tidak boleh dinilai secara analitik, oleh itu dikira secara numerik. Kamiran kerja dan fluk boleh dinilai secara analitik.

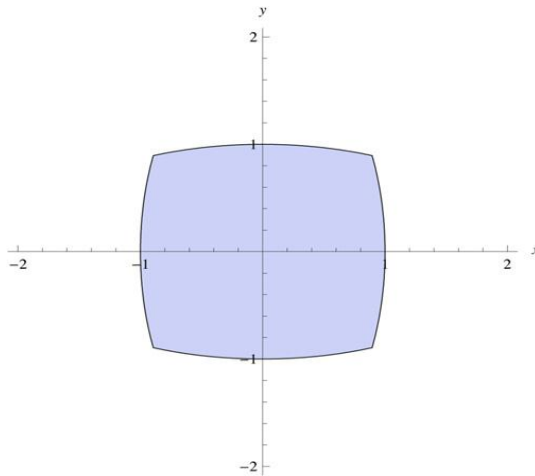
6.4 Persilangan Dua Elips

Cari kawasan dan panjang sempadan bagi rantau:

$$R = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1 \right\},$$

dipapar dalam Rajah 10. CAD bagi rantau ini mempunyai tiga kotak. Kawasan diberi oleh

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{-2/\sqrt{5}} \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} dy dx + \int_{-2/\sqrt{5}}^{2/\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} dy dx + \int_{2/\sqrt{5}}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} dy dx \\ &= 2\pi + 4 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 4 \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 3.70918. \end{aligned}$$



Rajah 10: Persilangan Dua Elips

dan panjang diberi oleh

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_{-1}^{-2/\sqrt{5}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{1-x^2}} dx + 2 \int_{-2/\sqrt{5}}^{2/\sqrt{5}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4(4-x^2)}} dx + 2 \int_{2/\sqrt{5}}^1 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{1-x^2}} dx \\ &= 8E\left(\cot^{-1}2 \middle| \frac{3}{4}\right) + 4(E(-3) - E(\tan^{-1}2 \middle| -3)) \approx 7.22281. \end{aligned}$$

$E(x)$ ialah kamiran eliptik lengkap dan $E(x|y)$ ialah kamiran eliptik bagi jenis kedua.

6.5 Contoh dengan Parameter Simbolik

Program Mathematica dapat menyelesaikan beberapa masalah dengan parameter. Program Mathematica CAD menghasil keputusan berguna dengan mudah. Kajian masih diterus bagi

menghasil kaedah yang lebih baik bagi mencari sempadan rantau berparameter. Kajian menunjukkan dua contoh mengguna parameter: bulatan dan *Witch of Agnesi*.

6.5.1 Bulatan dengan jejari berparameter

Jejari bulatan $a > 0$ diberi oleh

$$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Cari kawasan bagi bulatan tersebut. CAD bagi rantau ini, mengguna pembolehubah a, x, y , ialah kotak tunggal:

$$a > 0 \wedge -a \leq x \leq a \wedge -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Jika sebutan pertama disingkir, maka ini adalah bentuk yang tepat bagi kotak. Kawasan diberi oleh

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy dx.$$

Mathematica dapat menilai kamiran tersebut dengan mudah bagi mendapat πa^2 .

6.5.2 *The Witch of Agnesi*

The Witch of Agnesi ialah lengkung yang diberi oleh

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, -\infty < x < \infty.$$

Cari kawasan antara lengkung dan paksi x . Rantau diberi oleh

$$R = \{(x, y): y \geq 0 \wedge y(x^2 + 4a^2) \leq 8a^3 \wedge a > 0\}.$$

CAD bagi rantau ini, mengguna pembolehubah a, x, y , adalah kotak terhingga:

$$a > 0 \wedge 0 \leq y \leq \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}.$$

Jika sebutan pertama disingkir dan perhati x tersingkir, maka kotak yang diperoleh adalah bentuk piawai:

$$-\infty < x < \infty \wedge 0 \leq y \leq \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}.$$

Ini mudah ditukar kepada kamiran kawasan yang mana Mathematica dapat menilai dan menghasil $4\pi a^2$.

7. Kamiran Tiga Dimensi

Dalam bahagian ini, kajian membincang kamiran terhadap penjanaan silinder tiga dimensi, tetapi bukan rantau, kerana tidak melaksana bagaimana mengubah silinder dengan penerangan tidak piawai kepada penerangan seragam, dan kajian belum menghasil semua prinsip pemudahan sempadan yang perlu. Bagi isipadu, idea mengguna satah silinder diaplikasi kepada silinder tiga dimensi dengan hanya perubahan yang jelas dan mudah. Mengira sempadan bagi silinder adalah lebih kompleks.

7.1 Silinder 3D.

Silinder 3D mempunyai bentuk:

$$a \leq x \leq b \wedge c(x) \leq y \leq d(x) \wedge g(x, y) \leq z \leq h(x, y), \quad (7.1)$$

yang a dan b adalah pemalar nyata, c dan d adalah fungsi nilai nyata bagi pembolehubah nyata tunggal, dan g dan h adalah fungsi nilai nyata bagi dua pembolehubah. Kamiran $f = f(x, y, z)$ terhadap silinder (7.1) ialah

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Seperti dalam dua dimensi, algoritma CAD kini boleh diguna bagi menyusut kamiran terhadap rantau tiga dimensi kepada kamiran terlelar.

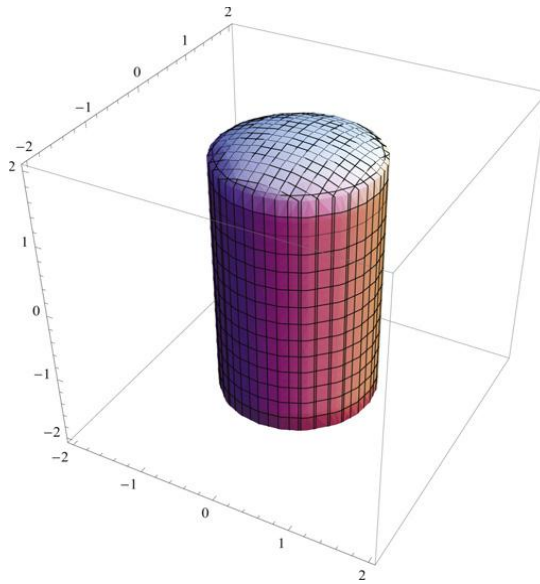
Contoh mudah diberi oleh silinder bundar yang dipotong daripada sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 1, \quad (7.2)$$

ditunjuk dalam Rajah 11. Kamiran f terhadap rantau diberi oleh

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Mathematica boleh diguna bagi mengira isipadu rantau adalah $4\pi \left(\frac{8}{3} - \sqrt{3}\right)$.



Rajah 11: Persilangan silinder bundar dan sfera.

7.2 Sempadan silinder

Sempadan silinder (7.1) diberi oleh

$$\{x, y\}, \quad a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x), \quad z = g(x, y), \quad + \vec{N}_1$$

$$\{x, y\}, \quad a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x), \quad z = h(x, y), \quad - \vec{N}_2$$

$$\{x, z\}, \quad a \leq x \leq b, \quad y = c(x), \quad g(x, c(x)) \leq z \leq h(x, c(x)), \quad + \vec{N}_3$$

$$\{x, z\}, \quad a \leq x \leq b, \quad y = d(x), \quad g(x, d(x)) \leq z \leq h(x, d(x)), \quad - \vec{N}_4$$

$$\{y, z\}, \quad x = b, \quad c(x) \leq y \leq d(x), \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y), \quad + \vec{N}_5$$

$$\{y, z\}, \quad x = a, \quad c(x) \leq y \leq d(x), \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y), \quad - \vec{N}_6$$

dengan

$$\vec{N}_1 = \{g^{(1,0)}(x, y), g^{(0,1)}(x, y), -1\}, \quad \vec{N}_2 = \{h^{(1,0)}(x, y), h^{(0,1)}(x, y), -1\},$$

$$\vec{N}_3 = \{c'(x), -1, 0\}, \quad \vec{N}_4 = \{d'(x), -1, 0\},$$

$$\vec{N}_5 = \{1, 0, 0\}, \quad \vec{N}_6 = \{1, 0, 0\}.$$

dan superskrip menunjuk derivatif. Setiap bahagian sempadan mengandungi 5 kemasukan. Kemasukan pertama ialah dua pembolehubah diguna bagi memparameter bahagian tersebut.

Tiga kemasukan seterusnya memberi persamaan kepada bahagian berkenaan dan had pada pembolehubah. Kemasukan terakhir ialah normal ke arah luar bagi bahagian tersebut.

Kamiran permukaan komponen normal \vec{v} ialah

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{c(x_0)}^{d(x)} \vec{N}_1(x, y) \cdot \vec{V}(x, y, g(x, y)) dy dx - \int_a^b \int_{c(x_0)}^{d(x)} \vec{N}_2(x, y) \cdot \vec{V}(x, y, h(x, y)) dy dx \\ & + \int_a^b \int_{g(x, c(x))}^{h(x, c(x))} \vec{N}_3(x) \cdot \vec{V}(x, c(x), z) dz dx - \int_a^b \int_{g(x, d(x))}^{h(x, d(x))} \vec{N}_4(x) \cdot \vec{V}(x, d(x), z) dz dx \\ & \int_{c(b)}^{d(b)} \int_{g(b, y)}^{h(b, y)} \vec{N}_5 \cdot \vec{V}(b, y, z) dz dy - \int_{c(a)}^{d(a)} \int_{g(a, y)}^{h(a, y)} \vec{N}_6 \cdot \vec{V}(a, y, z) dz dy \end{aligned}$$

Kamiran komponen normal medan vektor terhadap sempadan bagi silinder bundar yang bersilang dengan sfera (7.2) adalah terlalu panjang untuk dicetak di sini, tetapi formula diberi dalam *notebook*. Pengiraan kawasan permukaan mengganti $\vec{N} \cdot \vec{V}$ dengan punca kuasa dua $\vec{N} \cdot \vec{N}$ dalam formula terdahulu. Kawasan permukaan persilangan bagi silinder bundar bersilang dengan sfera dipapar dalam Rajah 11 ialah $4(4 - \sqrt{3})\pi$.

7.3 Teorem Kecapahan

Teorem kecapahan ialah

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{N} = \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{N},$$

yang Ω hanya menghubungkan rantau 3D, $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ialah operator kecapahan, \vec{V} ialah medan vektor, $\partial\Omega$ ialah sempadan Ω , dan \vec{N} ialah normal keluar kepada permukaan. Jika memilih $\vec{V} = (x/3, y/3, z/3)$, maka $\vec{\nabla} \cdot \vec{N} = 1$ dan hasilnya kamiran permukaan memberi isipadu rantau tersebut. Fakta ini diguna bagi memeriksa permukaan formula pengamiran permukaan.

7.4 Permukaan dan Lengkung Umum dalam 3D

Dalam 3D, permukaan aljabar diberi oleh $P(x, y, z) = 0$, sementara lengkung aljabar diberi oleh $P(x, y, z) = 0 \wedge Q(x, y, z) = 0$. Walaupun mudah, tetapi masih terdapat beberapa masalah. Pertama, objek tersebut boleh merosot. Contoh, jika $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$, maka permukaan menjadi set kosong. Jika P boleh difaktor, maka set sifar boleh menjadi kesatuan dua atau lebih lengkung mudah. Masalah lain ialah lengkung dan permukaan mempunyai kemungkinan dua orientasi. Tidak terdapat cara terbaik bagi menyatakan orientasi tersebut. Jika lengkung atau permukaan diberi secara parameter, yang merupakan kes dalam banyak pelaksanaan, maka orientasi didorong oleh pemparameteran. Jika lengkung C diorientasi dan bermula pada titik P_1 dan berakhir pada titik P_2 dan f ialah fungsi licin, maka teorem keupayaan (teorem asas kalkulus) boleh diguna:

$$\int_C \vec{\nabla} f = f(P_2) - f(P_1).$$

Dalam kes permukaan berorientasi S dengan normal \vec{N} , prinsip tangan kanan mengorientasi sempadan ∂S dengan vektor tangen \vec{T} . Jika \vec{V} ialah medan vektor licin, maka teorem Stokes diguna:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{N} = \int_{\partial S} \vec{V} \cdot \vec{T},$$

bagi menilai kamiran. Beberapa contoh diberi dalam *notebook*.

8. KESIMPULAN

Kajian menunjuk penggabungan rutin Mathematica CAD dengan beberapa alat aljabar komputer yang dibangun bagi meletak CAD dalam bentuk piawai, membolehkan rantau dua dimensi kompleks dipecah kepada silinder. Ini dapat menyusut kamiran terhadap rantau kepada sejumlah kamiran lelaran. Jika sejumlah kamiran lelaran tidak terlalu kompleks, penilaian secara analitik dapat dilakukan oleh kebanyakan sistem aljabar komputer. Dalam kes dua dimensi, panjang lengkung sempadan dan dua jenis kamiran sempadan boleh diperoleh. Selain daripada itu, versi dua dimensi bagi teorem kecapahan dan teorem Stokes diguna bagi kamiran dan menyemak kod yang dibangun.

Hasil 3D hanya dilaksana pada rantau silinder. Isipadu dan luas kawasan silinder boleh ditentukan. Dalam 3D, terdapat hanya satu teorem pengamiran bagi isipadu dan sempadan: teorem kecapahan. Kajian mengguna teorem kecapahan bagi menyemak formula kamiran isipadu dan permukaan. Kajian masih diterus bagi memperluas kajian ini kepada kawasan yang lebih umum.

Bagi pengiraan panjang lengkung dan kawasan permukaan bergantung pada algoritma “pemudahan sempadan”, kajian dapat melaksana pemudahan heuristik umum dalam dua dimensi dan heuristik separa dalam tiga dimensi. Ia merupakan satu masalah penting bagi mengubah heuristik tersebut kepada algoritma yang terbukti tepat.

Adalah penting untuk tidak mengguna keupayaan algoritma CAD sepenuhnya. Ini kerana kamiran terhadap set “kecil” adalah sifar dan kajian menghad pemerhatian kepada rantau tertutup dan bahagian dalaman. CAD yang dihad kepada set tersebut sepatutnya lebih pantas dan menghasil jawapan yang lebih sesuai daripada CAD yang bersifat umum. Beberapa contoh mudah menerangkan rantau pengamiran yang mengandungi parameter melibatkan CAD diguna serentak bagi pembolehkan perubahan pengamiran dan parameter.

Kajian turut melaksana beberapa idea bagi lengkung umum dan permukaan yang bukan sempadan rantau dalam 3D. Memperluas hasil kajian dan pelaksanaan teorem Stoke masih dalam perhatian. Kaedah aljabar yang dibangun boleh diguna sebagai asas secara numerik menganggar isipadu rantau dalam ruang multidimensi (Henrion, Lasserre & Savorgnan, 2009). Hasil kajian boleh diperluas kepada rantau yang ditakrif oleh fungsi transendental mudah.

Lampiran A. Pemparameteran lengkung sempadan

Formula dalam (5.6) dengan mengguna pemparameteran piawai yang menggerak titik dalam arah lawan jam atas lengkung sempadan:

$$C_1: x_1(\xi) = a + (b - a)\xi, \quad y_1(\xi) = l(a + (b - a)\xi),$$

$$C_2: x_2(\xi) = b, \quad y_2(\xi) = l(b) + (u(b) - l(b))\xi,$$

$$C_3: x_3(\xi) = b + (a - b)\xi, \quad y_3(\xi) = u(b + (a - b)\xi),$$

$$C_4: x_4(\xi) = a, \quad y_4(\xi) = u(a) + (l(a) - u(a))\xi,$$

yang a dan b ialah terhingga dan $0 \leq \xi \leq 1$. Jika a atau b adalah tidak terhingga, maka pemparameteran khas diperlu. Kamiran fluk dan kerja diberi oleh

$$W = \int_0^1 \vec{V}(x(\xi), y(\xi)) \cdot \vec{T}(x(\xi), y(\xi)) d\xi, \quad F = \int_0^1 \vec{V}(x(\xi), y(\xi)) \cdot \vec{N}(x(\xi), y(\xi)) d\xi.$$

Bagi lengkung 1 dan 3, perubahan dibuat pada pembolehubah daripada ξ kepada x , sementara bagi lengkung 2 dan 4, perubahan daripada ξ kepada y . Kamiran fluk dan kerja berubah dengan cara yang sama. Justeru, bagi pemudahan, perubahan hanya dibuat pada kamiran kerja.

Bagi lengkung pertama, $\xi = (x - a)/(b - a)$, $d\xi = dx/(b - a)$, $x(0)=a, x(1)=b$ dan

$$\vec{T}_1 = (x'(\xi), y'(\xi)) = (b - a, l'(x)(b - a)) = (b - a)(1, l'(x)).$$

Hasilnya,

$$W = \int_a^b \vec{V}(x, l(x)) \cdot (1, l'(x)) dx.$$

Bagi lengkung ketiga, $\xi = (x - b)/(a - b)$, $d\xi = dx/(a - b)$, $x(0) = b, x(1) = a$ dan

$$\vec{T}_3 = (x'(\xi), y'(\xi)) = (a - b, u'(x)(a - b)) = (a - b)(1, u'(x)).$$

Hasilnya,

$$W = \int_b^a \vec{V}(x, u(x)) \cdot (1, u'(x)) dx. = \int_a^b \vec{V}(x, u(x)) \cdot (-1, -u'(x)) dx.$$

Bagi lengkung kedua, $\xi = (y - l(b))/(u(b) - l(b))$, $d\xi = dy/((u(b) - l(b)))$, $y(0) = l(b), y(1) = u(b)$, dan

$$\vec{T}_2 = (x'(\xi), y'(\xi)) = (0, u(b) - l(b)) = (u(b) - l(b))(0, 1).$$

Hasilnya,

$$W = \int_{l(b)}^{u(b)} \vec{V}(b, y) \cdot (0, 1) dy.$$

Bagi lengkung keempat, $\xi = (y - u(a))/(l(a) - u(a))$, $d\xi = dy/((l(a) - u(a)))$, $y(0) = u(a)$, $y(1) = l(a)$, dan

$$\vec{T}_4 = (x'(\xi), y'(\xi)) = (0, l(a) - u(a)) = (l(a) - u(a))(0, 1).$$

Hasilnya,

$$W = \int_{u(a)}^{l(a)} \vec{V}(a, y) \cdot (0, 1) dy = \int_{l(a)}^{u(a)} \vec{V}(a, y) \cdot (0, -1) dy.$$

PENGHARGAAN

Setinggi penghargaan kepada Nurul Saadah Zawawi sebagai pembantu penyelidik (RA) dari Fakulti Teknologi dan Sains Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia dalam membantu menterjemah manuskrip ini.

RUJUKAN

- Arnon, D. S., Collins, G. E. and Mc Callum, S. 1984. Cylindrical algebraic decomposition. I. The basic algorithm. *SIAM Journal on Computing*, 13(4): 865–877.
- Brown, C. W. 2001. Simple cad construction and its applications. *Journal of Symbolic Computation*, 31: 521–547.
- Caviness, B. F., Johnson, J. R. (Eds.) 1998. *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition, Texts and Monographs in Symbolic Computation*. Springer-Verlag: NewYork.
- Collins, G. E., Hong, H. 1991. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. *Journal of Symbolic Computation*, (3): 299–328.
- Davis, H. F. & Snider, A. D. 1995. Introduction to Vector Analysis, William C Brown Pub.
- Dolzmann, A. & Weisp fenning, V. 2000. Local quantifier elimination, in: ISSAC'00: *Proceedings of the 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation/ edited by Carlo Traverso*. NewYork: ACM, 86–94.
- Henrion, D., Lasserre, J. B. & Savorgnan, C. 2009. Approximate volume and integration for basic semi algebraic sets. *SIAM Review*, 51(4): 722–743.
- Hong, H., Liska, R. & Steinberg, S. 1997. Testing stability by quantifier elimination. *Journal of Symbolic Computation*, 24(2): 161–187.
- Mc Callum, S. 1993. Solving polynomial strict inequalities using cylindrical algebraic decomposition. *Computer Journal*, 36: 432–438.
- Sawada, H. & Yan, X.-T. 2001. Application of gröbner bases and quantifier elimination for insightful engineering design. *Mathematics and Computers in Simulation*, 67(1–2): 135–148.

- Strzeboński, A. 2000. Solving systems of strict polynomial inequalities, *Journal of Symbolic Computation*, 29(3): 471–480.
- Strzeboński, A. 2005. Applications of algorithms for solving equations and inequalities in mathematics. *Proceedings of the A3L2005, April 3-6, Passau, Germany, Conference in Honor of the 60th Birthday of Volker Weispfenning*/ edited by Seidl, A., Dolzmann, A. & Sturm, T. , pp. 243–248.
- Yaacob, Y. 2007. Interactive Learning-Mathematica Enhanced Vector Calculus (ILMEV). PhD thesis, International Islamic University Malaysia.
- Yaacob, Y., Wester, M. and Steinberg, S. 2010. Towards the Development of an Automated Learning Assistant for Vector Calculus: Integration over Planar Regions, *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 17(2): 81–86.

NOTA BIOGRAFI

Dr. Michael J. Wester adalah ahli matematik yang berkhidmat di Department of Mathematics and Statistics, Center for High Performance Computing, University of New Mexico, Albuquerque, Amerika Syarikat dan pakar runding melalui syarikat beliau iaitu Cotopaxi. Beliau terlibat dalam bidang algebra komputer sejak tahun 1974.

Dr. Yuzita Yaacob adalah pensyarah kanan di Jabatan Teknologi dan Sains Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia. Minat beliau adalah dalam penggunaan algebra komputer dalam pendidikan.
e-mel: yy@ftsm.ukm.my

Dr. Stanly Steinberg adalah Profesor Emeritus di Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, Albuquerque, Amerika Syarikat. Beliau adalah pakar dalam pengkomputeran simbolik dan numerik dan pengaplikasiannya dalam mekanik kontinum dan transduksi isyarat dalam biologi sel.