

Lengkung Peralihan Licin dengan Kuartik Bezier Satahan (Smooth Transition Curve by Planar Bezier Quartic)

AZHAR AHMAD* & JAMALUDIN MD ALI

ABSTRAK

Kertas ini membincangkan satu keluarga lengkung peralihan satahan licin yang dibina menggunakan dua lingkaran kuartik Bezier. Lingkaran kuartik yang diperkenalkan ini mempunyai enam darjah kebebasan yang memberi kelebihan untuk mempelbagaikan rupa bentuk lingkaran di dalam selangnya. Kelicinan adalah dirujuk melalui ciri-ciri keselantaran geometri G^2 dan kelengkungan monoton yang dimiliki oleh sesuatu lengkung peralihan. Oleh sebab lengkungan ini tidak memiliki sebarang juring, gelung dan titik lengkok balas, di samping tanpa perubahan kelengkungan yang mendadak maka ia amat sesuai untuk aplikasi tertentu dalam Reka Bentuk Berbantuan Komputer (RBK) bagi memenuhi keperluan estatis serta kepentingan fungsinya seperti reka bentuk produk industri, trajektori robot tidak holonomi dan juga reka bentuk mendatar landasan kereta api serta lebuh raya. Sebagai suatu perwakilan polinomial, lingkaran kuartik Bezier ini mampu digabungkan ke dalam sistem RBK yang kebanyakannya berasaskan perwakilan NURBS (nonuniform rational B-splines).

Kata kunci: Kelengkungan monoton; lengkung peralihan; lingkaran kuartik bezier

ABSTRACT

This paper reports on a family of smooth transition curve rendered by a pair of Bezier quartic spiral. The family of Bezier quartic spiral form which was introduced has six degrees of freedom and will give advantage on diversity of the transition curve in the given constraints. Fair curves often referred on geometrical continuity G^2 and monotonically of curvature of the transition curves. Since these curves have no cusps, loops and the inflection points, and free from abrupt change of curvature, therefore it is suitable for some particular application in Computer Aided Design (CAD) in terms of aesthetical and functional values, especially in the industrial products design, trajectory of non-holonomic robot, as well as the horizontal route designs of railways and highways. Since Bezier quartic spiral is polynomial, it can be conveniently incorporated in CAD systems in the form of NURBS (nonuniform rational B-splines) representation.

Keywords: Bezier quartic spiral; monotone curvature; transition curve

PENGENALAN

Penyelidikan bagi menghasilkan reka bentuk lengkungan yang licin dan baik sentiasa menjadi fokus utama di dalam bidang Reka Bentuk Berbantuan Komputer (RBK) dan Reka Bentuk Geometri Berbantuan Komputer (RGBK). Perwakilan lengkung Bezier adalah salah satu perwakilan utama yang popular diguna pakai bagi penjanaan lengkungan dan permukaan (Marsh 1999). Perwakilan yang berdarjah rendah seperti kuadratik, kubik dan kuartik adalah yang utama. Oleh sebab ia tergolong dalam fungsi polinomial berparameter maka analisis geometri pembezaan didapati mudah untuk dijalankan. Lebih menarik ialah segmen lengkungan tersebut adalah lebih fleksibel, mudah dijangka dan mampu menghindar rupa bentuk yang kompleks. Bagi perwakilan yang berdarjah lebih besar daripada 2, segmen lengkungan yang terjana akan memiliki bentuk-bentuk seperti cembung, juring, gelung dan/atau titik lengkukbalas. Menurut Farin (1997), kelengkungan ekstrema pada sesuatu segmen lengkung yang baik hanya berlaku mengikut kehendak pereka bentuk itu sendiri. Manakala suatu segmen lingkaran yang

semenangnya tidak mempunyai kelengkungan ekstrema boleh dikatakan amat sesuai untuk pembinaan suatu lengkung peralihan yang licin.

Penggunaan geometri pembezaan amat perlu dalam menentukan sama ada segmen yang direka bentuk telah memenuhi syarat-syarat geometri yang telah ditetapkan. Antara hasil yang ingin dicapai melalui analisis geometri pembezaan adalah lengkungan yang licin, ia selalunya dirujuk melalui darjah keselantaran yang wujud pada titik dengan segmen-segmen lengkung berhubung. Umumnya, singkatan G^n digunakan bagi merujuk darjah ke- n keselantaran secara geometri. Juga kelengkungan yang monoton bagi sesuatu segmen lengkung melalui tandaan positif atau negatif pada nilai terbitan pertama fungsi kelengkungan.

Lingkaran klotoid ialah satu lengkung satahan yang memiliki kelengkungan yang monoton, ia berubah secara linear dengan panjang lengkungnya. Lingkaran yang diperkenalkan semenjak 1740-an telah mendapat banyak perhatian dalam reka bentuk geometri (Kostov & Degtiarova 1995). Disebabkan sifat yang menarik

tersebut maka ia banyak digunakan sebagai lengkung peralihan di dalam reka bentuk mendatar lebuhraya dan landasan kereta api, serta pada trajektori kenderaan automotik terkawal. Meskipun ia popular digunakan sebagai lengkung peralihan, klotoid didapati kurang lentur di samping perwakilannya yang terdiri daripada kamiran fungsi Fresnel tidak dapat diperolehi secara tepat kecuali melalui penggunaan kaedah berangka. Oleh sebab klotoid digolongkan sebagai fungsi transenden maka adalah sukar untuk digabungkan dengan perwakilan NURBS, kerana ia merupakan piawai dalam kebanyakan perisian komputer untuk reka bentuk geometri. Justeru itu, perwakilan lingkaran berasaskan polinomial berparameter amat sesuai dijadikan alternatif kepada klotoid untuk pembinaan lengkung yang licin.

Merujuk kepada pembinaan lengkung peralihan satahan dengan perwakilan berasaskan fungsi polinomial berparameter, Walton dan Meek (1996a, 1996b) telah memperkenalkan lingkaran kubik Bezier dan lingkaran kuintik Pythagorean hodograf (PH). Kedua-dua lingkaran tersebut memiliki lima darjah kebebasan yang membolehkan ia digunakan bagi pembinaan lengkung peralihan yang mempunyai keselanjaran G^2 . Usaha meningkatkan darjah kebebasan lingkaran kubik Bezier ada dijelaskan di dalam Habib dan Sakai (2003), Kang dan Jamaludin (2003) dan Walton et al. (2003) dengan menggunakan pelbagai bentuk pendekatan yang berbeza. Begitu juga dengan peningkatan darjah kebebasan pada lingkaran kuintik PH, ia ditunjukkan di dalam Walton dan Meek (2004, 2007). Azhar et al. (2007) telah memperkenalkan lingkaran kuartik Bezier bagi pembinaan lengkung peralihan G^2 di antara dua bulatan yang terpisah.

Tujuan kertas ini adalah untuk mengemukakan rumusan bagi suatu keluarga lingkaran kuartik Bezier yang memiliki enam darjah kebebasan yang dipermudahkan daripada Azhar et al. (2007), serta memperlihatkan kaedah pembinaan lengkung peralihan di antara dua bulatan dan di antara dua garis melalui penggunaan proses transformasi. Dengan perwakilan lingkaran ini kita mampu menghasilkan penghampiran kepada kelengkungan yang berubah secara linear berbanding dengan parameternya, di samping itu ia juga memiliki hubungan keselanjaran G^2 . Daripada segi visual, keselanjaran G^2 memberi satu hubungan peralihan yang licin, sesuai untuk banyak aplikasi RBK.

Bahagian seterusnya membincangkan tatatanda, ketetapan serta latar belakang yang digunakan dalam kertas ini. Bahagian selepasnya pula memperkenalkan lingkaran kuartik Bezier yang dipermudahkan serta sifat-sifat yang dimilikinya. Pembinaan lengkung peralihan di antara satu titik dan satu bulatan dibincangkan pada bahagian seterusnya. Manakala perbincangan pembinaan lengkung peralihan di antara dua bulatan dan di antara dua garis dijelaskan pada bahagian-bahagian seterusnya. Satu contoh aplikasi lingkaran ini ada ditunjukkan pada bahagian akhir.

TATATANDA, KETETAPAN DAN LATAR BELAKANG

Simbol yang ditandakan dengan huruf besar condong mewakili vektor, sementara huruf kecil dan Greek condong pula adalah pemboleh ubah, parameter atau pemalar. Hasil darab titik untuk dua vektor satahan, P dan Q diwakili dengan $P \bullet Q = |P||Q| \cos \theta$. Ditetapkan bahawa hasil darab pangkah P dan Q diwakili dengan $P \times Q = |P||Q| \sin \theta$ dan ia berkuantiti skalar (Artin 1957). Sudut θ adalah dijanakan daripada P kepada Q dan ia adalah bernilai positif, serta bernilai negatif untuk sebaliknya. Berikut adalah rumus kuartik Bezier merujuk kepada parameter t , $0 \leq t \leq 1$ (Farin 1997):

$$z(t) = \sum_{i=0}^4 B_i \binom{4}{i} (1-t)^{4-i} t^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

dengan B_i adalah titik kawalan dan $\binom{4}{i} (1-t)^{4-i} t^i$ adalah fungsi penjana yang dikenali sebagai polinomial Bernstein. Manakala yang berikut pula adalah rumusan kelengkungan bagi sebarang lengkung satahan $Z(t)$ (Marsh 1999):

$$\kappa(t) = \frac{Z'(t) \times Z''(t)}{\|Z'(t)\|^3}. \tag{2}$$

Oleh sebab penyebut $\|Z'(t)\|^3$ adalah sentiasa positif, maka tandaan $\kappa(t)$ ditentukan oleh pengangkanya. Suatu lengkung dikatakan dibengkokkan ke arah kiri apabila $\kappa(t)$ bernilai positif dan bernilai negatif jika dibengkokkan ke arah kanan. Manakala $r(t) = 1/\kappa(t)$. Terbitan pertama bagi (2) dapat diringkaskan sebagai:

$$\kappa'(t) = \frac{\chi(t)}{\|Z'(t)\|^5}, \tag{3}$$

dengan

$$\chi(t) = (Z'(t) \bullet Z''(t)) \frac{d}{dt} (Z'(t) \times Z''(t)) - 3(Z'(t) \times Z''(t))(Z'(t) \bullet Z''(t)). \tag{4}$$

Penyebut $\|Z'(t)\|^5$ juga diabaikan dalam penentuan tandaan $\kappa'(t)$ kerana ia sentiasa positif. Di sini $\chi(t)$ berperanan menentukan tandaan $\kappa'(t)$. Ringkasnya, $\kappa'(t) > 0$ apabila $\chi(t) > 0$ dan ini memberi maksud peningkatan secara monoton bagi $\kappa(t)$, serta penyusutan jika $\kappa'(t)$ bila $\chi(t) < 0$.

RUMUSAN LINGKARAN KUARTIK BEZIER SATAHAN

Di dalam kertas ini, lingkaran kuartik Bezier mempunyai sifat-sifat seperti berikut;

$$\begin{aligned} Z(0) &= B_0, \quad Z(1) = B_4, \\ \frac{Z'(0)}{\|Z'(0)\|} &= T_0, \quad \frac{Z'(1)}{\|Z'(1)\|} = T_1, \\ \kappa(0) &= 0, \quad \kappa(1) = 1/r, \quad \kappa'(1) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Rumusan lingkaran kuartik telah diperoleh melalui kaedah memanipulasikan secara aljabar (1)-(4) dengan menggunakan (5). Berikut adalah rumus bagi lingkaran kuartik Bezier yang memenuhi sifat-sifat (5), diringkaskan dengan teorem berikut.

TEOREM 1

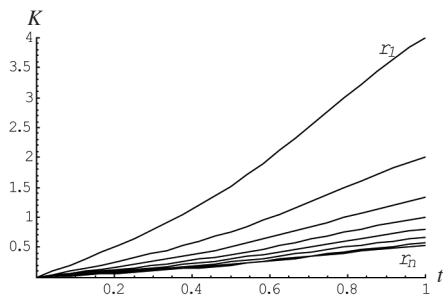
Diberi titik permulaan, B_0 , dua vektor unit tangen T_0 dan T_1 masing-masing pada titik permulaan dan titik akhir. Biarkan θ sebagai sudut mengikut arah lawan jam daripada T_0 ke T_1 , dengan $\theta \in (0, \pi/2]$. Serta kelengkungan yang bernilai positif pada titik akhir diberi sebagai $1/r$. Jika titik kawalan ditandakan sebagai B_k , $k = 1,2,3,4$ adalah seperti berikut,

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B_0 + \frac{25r\xi^3 \operatorname{Sec} \theta \operatorname{Tan} \theta}{621} T_0, \\
 B_2 &= B_1 + \frac{r\xi^3 \operatorname{Sec} \theta \operatorname{Tan} \theta}{27} T_0, \\
 B_3 &= B_2 + \frac{r\xi^2 \operatorname{Sec} \theta \operatorname{Tan} \theta}{27} T_0 + \frac{5r\xi \operatorname{Sec} \theta \operatorname{Tan} \theta}{54} T_1, \\
 B_4 &= B_3 + \frac{r\xi \operatorname{Tan} \theta}{6} T_1,
 \end{aligned} \tag{6}$$

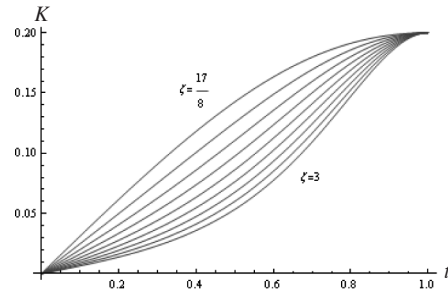
dengan $\xi \geq 17/8$. Jika $Z(t)$ memenuhi (1) dan (6) maka $Z(t)$ adalah satu keluarga lingkaran kuartik Bezier dengan kelengkungan positif yang menokok.

Lingkaran kuartik Bezier ini mempunyai enam darjah kebebasan; dua daripada B_0 dan setiap satu daripada r, θ, T_0 dan ξ . Ini memberi kelebihan berbanding dengan lingkaran clothiod yang hanya mempunyai lima darjah kebebasan. Dengan kelebihan satu darjah tersebut maka kita mampu menghasilkan satu keluarga bagi suatu lengkung peralihan. Pembuktian Teorem 1 ditunjukkan pada Lampiran A.

Rajah 1 menunjukkan contoh profil kelengkungan bagi lingkaran Z dengan nilai θ dan ξ ditetapkan manakala kelengkungan berubah dengan $r = r_i$, dengan $r_1 < r_2 < \dots < r_n$. Manakala Rajah 2 menunjukkan contoh profil kelengkungan bagi lingkaran Z dengan perubahan ξ di samping nilai θ dan r yang ditetapkan. Kelengkungan yang ditunjukkan pada Rajah 1 dan 2 boleh digunakan bagi membuat penghampiran kepada fungsi linear. Oleh yang demikian kita boleh gunakan lingkaran ini sebagai alternatif kepada lengkung klotoid.



RAJAH 1. Profil kelengkungan Z dengan menetapkan θ dan ξ , serta pelbagai nilai r



RAJAH 2. Profil kelengkungan Z dengan menetapkan θ dan r , serta pelbagai nilai ξ

LENGKUNG PERALIHAN DI ANTARA SATU TITIK DAN SATU BULATAN

Bagi membina lengkung peralihan di antara dua bulatan untuk bentuk S dan C, serta di antara dua garis, kita boleh mulakan dengan lengkung peralihan di antara satu titik dan satu bulatan. Pembinaan dan syarat keunikan bagi lingkaran tersebut adalah seperti berikut.

Merujuk kepada Rajah 3, katakan diberi satu titik B_0 dan satu bulatan Ω_0 berpusat pada C_0 dengan jejari r . Maka daripada (1) dan (6), kita akan memperoleh satu hubungan penting seperti berikut,

$$Z(1) = B_0 + a_0 T_0 + b_0 T_1, \tag{7}$$

dengan

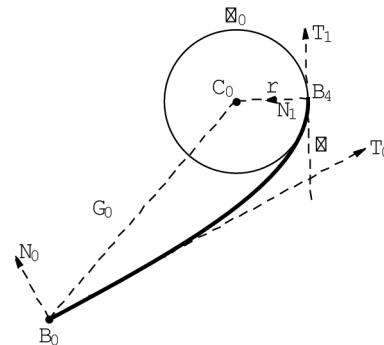
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{621} r \xi^2 (23 + 48\xi) \operatorname{Sec} \theta \operatorname{Tan} \theta, \\
 b_0 &= \frac{7}{27} r \xi \operatorname{Tan} \theta.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Katakan $G_0 = C_0 - B_0$, maka daripada gambar rajah kita akan memperoleh maklumat-maklumat penting berikut:

$$G_0 \cdot T_0 = a_0 - r \operatorname{Sin} \theta + b_0 \operatorname{Cos} \theta. \tag{9}$$

$$G_0 \cdot N_0 = r \operatorname{Cos} \theta + b_0 \operatorname{Sin} \theta. \tag{10}$$

$$\|G_0\|^2 = a_0^2 + b_0^2 + r^2 + 2_a (b_0 \operatorname{Cos} \theta - r \operatorname{Sin} \theta). \tag{11}$$



RAJAH 3. Contoh lengkung peralihan dengan $B_0 = (0,0)$, $C_0 = (8.6, 12/6)$, $T_0 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, $T_1 = (0,1)$, $\xi = 17/8$ dan $r = 5$

Dengan menggantikan a_0 dan b_0 daripada (8), kita dapat tuliskan (11) sebagai

$$\|G_0\|^2 = r^2(1 + z_1 \tan^2 \theta + z^2 \tan^4 \theta), \tag{12}$$

dengan

$$z_1 = \frac{(\xi^4 (23 + 48\xi)^2 + 23\xi^2 (-115 - 2270\xi + 672\xi^2))}{385641},$$

$$z_2 = \frac{\xi^4 (23 + 48\xi)^2}{385641}. \tag{13}$$

Syarat bagi wujudnya lingkaran $Z(t)$ yang unik adalah $\|G_0\| > r$, diperoleh daripada (12) kerana θ adalah unik, disebabkan z_1, z_2 akan bernilai positif apabila $\xi \geq 17/8$. Daripada maklumat yang diberi oleh persamaan (12)-(13), kita dapat tentukan pasangan θ, ξ tertentu bagi pembinaan lingkaran dari satu titik ke satu bulatan yang berkelengkungan positif serta menokok secara monoton. Oleh itu kita boleh memilih sebarang θ atau ξ bagi mendapatkan lingkaran $Z(t)$ yang bersesuaian. Dengan B_0 berada diasalan dan T_0 selari dengan paksi-x yang positif lingkaran $Z(t)$ diringkaskan sebagai:

$$Z(t) = (x(t), y(t)), \tag{14}$$

dengan

$$x(t) = \frac{1}{1242} rt\xi \text{Sec}\theta \text{Tan}\theta \begin{pmatrix} 200\xi^2 - 24t\xi^2 \\ +t^2(230 + 184\xi - 168\xi^2) \\ +r^2(-69 - 138\xi + 88\xi^2) \\ -23t^2(-10 + 3t)\text{Cos}2\theta \end{pmatrix}$$

$$y(t) = -\frac{1}{27} r\xi t^3 \text{Sin}\theta \text{Tan}\theta (-10 + 3t). \tag{15}$$

Selanjutnya adalah pembinaan lengkung peralihan di antara dua bulatan serta di antara dua garis, yang menggunakan maklumat penting daripada bahagian ini.

LINGKARAN PERALIHAN DI ANTARA DUA BULATAN

Untuk pembinaan seterusnya, kami mencadangkan penggunaan lingkaran (14)-(15) yang dilukis dengan B_0 berada diasalan dan T_0 selari dengan paksi-x yang positif. Langkah ini jelas menakrifkan pusat bulatan C_0 berkoordinat $(G_0 \bullet N_0, G_0 \bullet T_0)$. Dengan menggunakan transformasi yang mengekalkan bentuk objek tertentu seperti putaran dan refleksi, kita dapat memperoleh lengkungan peralihan bentuk S dan C. Selanjutnya dapat ditransformasikan kepada sebarang lokasi yang diinginkan.

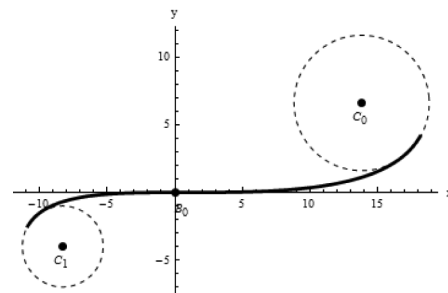
LENGKUNG PERALIHAN BENTUK-S

Andaikan dua bulatan terpisah Ω_0, Ω_1 dengan pusat C_0, C_1 . Diberi jejari kedua-dua bulatan tersebut masing-masing adalah r_0, r_1 . Biarkan $Z(r,t) = (x(r,t), y(r,t)), 0 \leq t$

≤ 1 sebagai lingkaran kuartik yang memuaskan (14)-(15). Maka pasangan $(x(r_0, t), y(r_0, t))$ dan $(-x(r_1, t), -y(r_1, t))$ akan membina satu lengkung peralihan berbentuk S yang menghubungkan dua bulatan yang berjejari r_0 dan r_1 . Dengan jarak di antara kedua-dua pusat bulatan diberi dengan persamaan berikut,

$$\|C_0 - C_1\| = (r_0 + r_1)\sqrt{1 + \gamma^2 z_1 + \gamma^4 z_2}, \tag{16}$$

dengan $\gamma = \tan\theta$, serta z_1, z_2 sebagaimana (13). Daripada pengiraan $\|C_0 - C_1\|$ kita mampu mendapatkan satu pasangan θ, ξ yang unik bagi pembinaan lengkungan peralihan tersebut. Adalah jelas daripada (16), bahawa lengkung peralihan hanya tertakrif apabila $\|C_0 - C_1\| > (r_0 + r_1)$. Rajah 4 menunjukkan satu contoh lengkungan peralihan berbentuk S yang dibentuk apabila diberi dua bulatan yang masing-masing berpusat pada $C_0 = (13.80, 6.63)$, $C_1 = (-8.28, -3.98)$ dengan jejari $r_0 = 5, r_1 = 3$. Dengan menetapkan $\theta = \pi/3$, maka diperoleh $\xi = 17/8$.



RAJAH 4. Lengkung peralihan bentuk S

LENGKUNG PERALIHAN BENTUK-C

Berikutnya dijelaskan pembinaan lingkaran peralihan berbentuk C yang menghubungkan dua bulatan. Andaikan dua bulatan Ω_0, Ω_1 dengan pusat C_0, C_1 . Diberi jejari kedua-dua bulatan berkenaan masing-masing adalah r_0, r_1 . Biarkan $Z(r,t) = (x(r,t), y(r,t)), 0 \leq t \leq 1$ sebagai lingkaran kuartik yang memuaskan (14)-(15). Maka pasangan $(x(r_0, t), y(r_0, t))$ dan $(-x(r_1, t), y(r_1, t))$ akan membina satu lengkung peralihan berbentuk C yang menghubungkan dua bulatan. Jarak di antara kedua-dua pusat bulatan diberi dengan persamaan berikut,

$$\|C_0 - C_1\| = \sqrt{\omega_1 (r_0 + r_1)^2 + \omega_2 (r_0 - r_1)^2}, \tag{17}$$

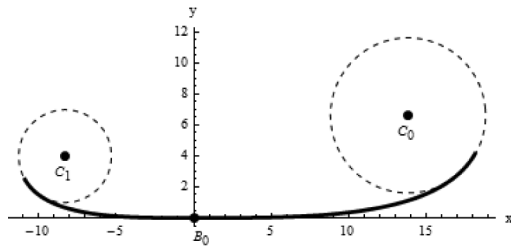
dengan

$$\omega_1 = \left(\frac{729 - 378\xi - 49\gamma^2\xi^2}{729(1 + \gamma^2)} + z_1 + \gamma^2 z_2 \right),$$

$$\omega_2 = \frac{(27 + 7\gamma^2\xi)^2}{729(1 + \gamma^2)}, \quad \gamma = \text{Tan}\theta, \tag{18}$$

dengan z_1, z_2 daripada (13). Rajah 5 menunjukkan satu contoh lengkung peralihan berbentuk C. Pada contoh ini

ditetapkan $\theta = \pi/3$ maka kita akan memperoleh $\xi = 17/8$ bagi menghubungkan dua bulatan yang masing-masing berpusat pada $C_0 = (13.80, 6.63)$, $C_1 = (-8.28, 3.98)$ dengan jejari adalah $r_0 = 5$, $r_1 = 3$. Sebagaimana pada lingkaran peralihan bentuk S, kita akan memperoleh pasangan θ, ξ yang unik melalui penyelesaian (17)-(18). Walau bagaimanapun, lengkung peralihan bentuk C ini hanya tertakrif apabila $\|C_0 - C_1\| > |r_0 - r_1|$ yang secara gambaran geometri bermaksud tiada satu bulatan di dalam bulatan yang satu lagi .



RAJAH 5. Lengkungan peralihan bentuk C

LINGKUNG PERALIHAN DI ANTARA DUA GARIS LURUS

Kaedah pembinaan lengkung peralihan di antara dua garis yang tidak selari adalah seperti berikut. Kita menggunakan lingkaran yang berkelengkungan positif yang menyusut secara monoton. Perwakilan $Z(t)$ yang berkenaan diperoleh melalui manipulasi persamaan (6), titik kawalan $B_k, k = 1,2,3,4$ yang baru adalah seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B_0 + \frac{r\xi \tan\theta}{6} T_0, \\
 B_2 + B_1 &+ \frac{r\xi^2 \sec\theta \tan\theta}{27} T_1 + \frac{5r \tan\theta}{54} T_0, \\
 B_3 &= B_2 + \frac{r\xi^3 \sec\theta \tan\theta}{27} T_1, \\
 B_4 &= B_1 + \frac{25r\xi^3 \sec\theta \tan\theta}{621} T_1, \tag{19}
 \end{aligned}$$

Penjanaan (1) dan (19) menghasilkan lingkaran yang mempunyai sifat-sifat berikut:

$$\begin{aligned}
 z(0) &= B_0, \quad z(1) = B_4, \\
 \frac{z'(0)}{\|z'(0)\|} &= T_0, \quad \frac{z'(1)}{\|z'(1)\|} = T_1, \\
 \kappa(0) &= 1/r, \quad \kappa(1) = 0, \quad \kappa'(1) = 0, \tag{20}
 \end{aligned}$$

daripada persamaan $Z(t)$ apabila $t = 1$, kita peroleh:

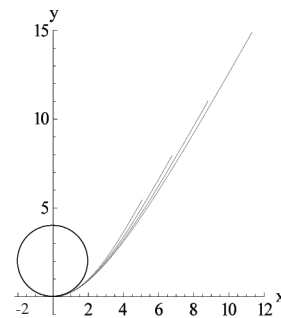
$$Z(1) = B_0 + b_0 T_0 + a_0 T_1, \tag{21}$$

dengan a_0, b_0 sebagaimana (8). Formula baru ini memiliki kelengkungan yang positif menyusut secara monoton serta dapat diringkaskan sebagai:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -\frac{1}{621} r t \xi \tan\theta (-414 - 138t(-2 + \xi) \\
 &\quad - 46t^2(-1 - 4\xi + 2\xi^2) + t^3(-69 - 69\xi + 44\xi^2)) \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= -\frac{1}{621} r t^2 \xi^2 \tan^2\theta (-138 - 92t(-2 + \xi) + t^2(-69 + 44\xi)). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Dengan (22)-(23) kita dapat membentuk satu keluarga lingkaran kuartik Bezier yang berkelengkungan positif dan menyusut secara monoton, seperti ditunjukkan pada Rajah 6.



RAJAH 6. Contoh satu keluarga lingkaran kuartik Bezier berkelengkungan positif menyusut secara monoton

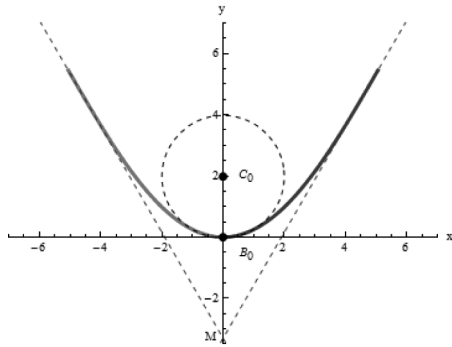
Berikut adalah kaedah bagi membina lengkung peralihan di antara dua garis lurus. Andaikan L_0, L_1 adalah dua garis lurus yang tidak selari. Diberi sudut di antara kedua-duanya adalah $\pi - 2\theta, 0 < \theta < \pi/2$ dan kelengkungan pada titik pertemuan kedua-dua lingkaran adalah $1/r$. Biarkan $Z(t) = (x(t), y(t)), 0 \leq t \leq 1$ sebagai lingkaran kuartik yang memuaskan (22)-(23). Maka pasangan $(x(t), y(t))$ dan $(-x(t), y(t))$ akan membina lengkung peralihan yang menghubungkan dua garis lurus dengan keselajaran G^2 , seperti ditunjukkan pada Rajah 7. Jika M ditandakan sebagai titik persilangan antara dua garis berkenaan dan pusat bulatan kelengkungan sebagai C_0 , maka jarak di antara C_0 dan M adalah:

$$\|C_0 - M\| = \frac{r \cos\theta + b_0 \sin\theta}{\cos\theta}, \tag{24}$$

dengan menetapkan $\|C_0 - M\| = \rho, r, \theta$ maka nilai ξ mestilah memuaskan persamaan di bawah:

$$\xi = \frac{27(\rho - r) \cot^2\theta}{7r} \geq \frac{17}{8}. \tag{25}$$

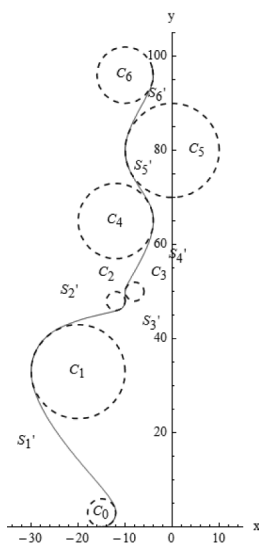
Analisis selanjutnya ke atas persamaan (25) mendapati $\rho \geq r \left(1 + \frac{119}{216} \tan^2\theta\right)$ adalah syarat untuk lengkung peralihan boleh diperoleh. Rajah 7 adalah satu contoh ilustrasi lengkung peralihan yang menghubungkan dua segmen dengan $r = 2, \theta = \pi/3$ serta $\xi = 17/8$, manakala $M = (0, -3.31)$ dan $C_0 = (0, 2)$.



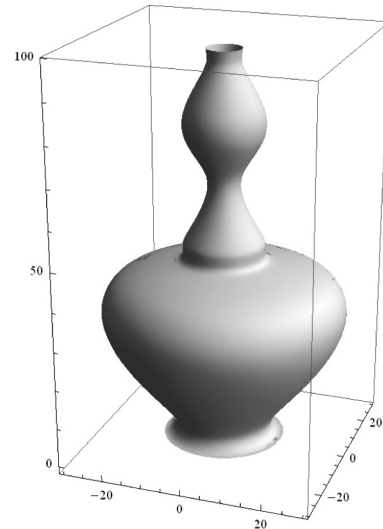
RAJAH 7. Lengkung peralihan antara dua garis

CONTOH APLIKASI LENGKUNG PERALIHAN

Terdapat banyak aplikasi dalam bidang RGBK dan RBK yang memerlukan paparan dan penjaanaan yang licin iaitu merujuk kepada hubungan keselantaran G^n serta kelengkungan yang monoton. Lingkaran kuartik Bezier yang dibincangkan di dalam kertas ini mampu menjadi satu alternatif untuk kita memperoleh reka bentuk lengkung yang licin seterusnya dapat dikembangkan kepada pembinaan permukaan yang licin. Meskipun darjah kebebasan bagi lingkaran kuartik Bezier adalah kurang berbanding dengan lengkung kuartik Bezier, namun lingkaran kuartik dapat menjamin lengkung yang dibina bebas daripada gelung, punding dan mempunyai kelengkungan monoton. Contoh aplikasi yang berkaitan adalah seperti penghasilan reka bentuk produk konsumer yang mementingkan aspek estetik. Rajah 8 dan 9 memperlihatkan satu contoh reka bentuk geometri sebuah pasu (labu sayong) hasil gabungan 5 lengkung peralihan bentuk S dan 5 segmen bulatan yang juga berasaskan perwakilan kuartik Bezier. Proses transformasi bagi mendapatkan setiap lengkung peralihan ada dijelaskan pada Lampiran B. Permukaan pasu yang diperoleh adalah lebih licin dengan hubungan keselantaran G^2 .



RAJAH 8. Gabungan beberapa lengkung peralihan dan segmen bulatan yang membentuk keratan sisi sebuah pasu



RAJAH 9. Permukaan resolusi membentuk pasu (labu sayong) daripada Rajah 8

Antara aplikasi estetik lain adalah pembinaan skema huruf serta boleh digunakan bagi perbaikan pada sudut tajam (Habib & Sakai 2003). Bagi kepentingan fungsi, kita boleh mengaplikasikan lingkaran kuartik melalui lengkung peralihan dalam reka bentuk mendatar laluan lebuhraya dan landasan kereta api. Penggunaan lingkaran di dalam reka bentuk ini telah lama digunakan dan amat diajukan oleh kebanyakan pihak. Secara tradisi, klotoid digunakan dalam kebanyakan kes, namun hubungan G^2 adalah tidak memadai bagi pergerakan yang licin untuk suatu objek dengan kelajuan tinggi. Oleh sebab lingkaran kuartik yang diperkenalkan ini memiliki keselantaran G^3 pada satu hujung sebagaimana ditunjukkan dengan $\kappa'(1) = 0$ pada persamaan (5), ini jelas menunjukkan kadar perubahan kelengkungan lingkaran pada titik B_4 adalah sama dengan kadar perubahan kelengkungan bagi suatu bulatan yang bernilai sifar. Maka pada situasi tersebut pergerakan suatu objek berkelajuan tinggi pada ketika melalui titik hubungan antara lingkaran dan bulatan akan merasai kadar sentakan yang minimum. Dalam masa yang sama ia dapat mengurangkan berlaku kerosakan alatan, landasan kereta api dan seterusnya menjimatkan kos operasi (Tari & Baykal 2005). Kepentingan penggunaan lingkaran pada amalan pembinaan lebuhraya di Amerika Utara dan Eropah ada dibincangkan di dalam Gibreel et al. (1999). Perhatian yang sama telah diberi kepada proses mereka bentuk trejaktori robot yang merujuk kepada *High Speed Machining* (HSM) (Yao & Joneja 2007). HSM menjadi amat penting kepada kebanyakan proses reka bentuk pembuatan masa kini. Penggunaan lingkaran yang memiliki darjah G^3 dapat mengelak berlakunya kerosakan fizikal serta melancarkan operasi.

KESIMPULAN

Kertas ini telah berjaya membincangkan kaedah pembinaan lengkung peralihan yang menghubungkan dua bulatan

untuk bentuk S dan C, juga pembinaan lengkung peralihan yang menghubungkan dua garis yang tidak selari. Pembinaan tersebut mengguna pakai satu keluarga lingkaran kuartik Bezier yang mempunyai enam darjah kebebasan. Dengan menggunakan perwakilan ini kita mampu membina lingkaran peralihan yang mempunyai darjah keselantaran G^2 melalui penggunaan tranfomasi afin, serta dapat dipelbagaikan bentuk lingkaran melalui penyelarasan parameter-parameternya. Juga ditunjukkan bahawa ia dapat menghasilkan kelengkungan yang hampir monoton secara linear dan ini menghampiri kelengkungan bagi klotoid. Oleh yang demikian, lingkaran ini dapat dijadikan sebagai satu alternatif kepada reka bentuk yang mementingkan paparan lengkung yang licin, selanjutnya penggunaan lingkaran ini boleh dikembangkan kepada pelbagai aplikasi RBK yang lain.

PENGHARGAAN

Setinggi-tinggi penghargaan yang tidak terhingga kepada Universiti Pendidikan Sultan Idris serta KPTM di atas segala sokongan melalui geran penyelidikan FRGS (2010-0066-102-02).

LAMPIRAN A

Berikut adalah pembuktian bagi Teorem 1. Teorem memaparkan syarat yang cukup bagi memperoleh satu keluarga lingkaran kuartik Bezier yang mempunyai kelengkungan positif serta monoton. Ditunjukkan di sini pembuktian berdasarkan kepada pembuktian secara konstruktif. Dimulakan dengan mencari $Z(t)$, $Z'(t)$, $Z''(t)$ dan diikuti dengan $z'(t) \times Z''(t)$, $Z'(t) \bullet Z'(t)$, $z'(t) \times z''(t)$ dan $z'(t) \bullet z''(t)$. Berikut adalah perincian yang diperoleh melalui bantuan perisian CAS, *Mathematica* 8.

Daripada (1) dan (5), kita peroleh:

$$Z(t) = B_0 + \eta_0 T_0 + \eta_1 T_1 \tag{A1}$$

dengan:

$$\eta_0 = \frac{1}{621} r t \xi^2 (t^2 (92 - 84\xi) + 100\xi - 12t\xi + t^3 (44\xi - 69)) \sec\theta \tan\theta,$$

$$\eta_1 = \frac{1}{27} r (10 - 3t) t^3 \xi \tan\theta. \tag{A2}$$

Pembezaan peringkat pertama bagi $Z(t)$ adalah:

$$Z'(t) = \alpha_0 T_0 + \alpha_1 T_1, \tag{A3}$$

dengan:

$$\alpha_0 = \frac{4}{621} r (-1 + t) \xi^2 (-25\xi - 19t\xi + t^2 (-69 + 44\xi)) \sec\theta \tan\theta$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{9} r t^2 (-5 + 2t) \xi \tan\theta. \tag{A4}$$

Manakala pembezaan peringkat kedua pula adalah:

$$Z''(t) = \beta_0 T_0 + \beta_1 T_1, \tag{A5}$$

dengan

$$\beta_0 = \frac{4}{207} r \xi^2 (t(46 - 42\xi) - 2\xi + t^2 (-69 + 44\xi)) \sec\theta \tan\theta,$$

$$\beta_1 = \frac{4}{9} r t (-5 + 3t) \xi \tan\theta, \tag{A6}$$

dengan $T_0 \bullet T_1 = \cos\theta$, $T_0 \wedge T_1 = \sin\theta$. Selanjutnya, hasil darab titik dan pangkah berikut diperoleh,

$$Z'(t) \bullet Z'(t) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 \cos\theta$$

$$Z'(t) \wedge Z''(t) = (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0) \sin\theta$$

$$Z'(t) \bullet Z''(t) = \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) \cos\theta + \alpha_1 \beta_1. \tag{A7}$$

Dari (4), pengangka bagi $\kappa'(t)$ adalah:

$$\chi(t) = \frac{\Theta}{2155347549} 64r^4 (1-t) \xi^5 \tan^5 \theta, \tag{A8}$$

dengan $\Theta = \sum_{i=0}^8 c_i (1-t)^{8-i} t^i$ serta nilai c_i , $i=0,1,2,\dots,8$ adalah seperti berikut:

$$c_0 = 312500s\xi^5, \quad c_1 = 2437500s\xi^1, \quad c_2 = 3000\xi^3 d_2,$$

$$c_3 = 4140\xi^3 d_3, \quad c_4 = 1035\xi d_4, \quad c_5 = 3105\xi d_5,$$

$$c_6 = 28566\xi d_6, \quad c_7 = 42849d_7, \quad c_8 = 128547d_8. \tag{A9}$$

dengan

$$d_2 = -2875 + 2s(-575\xi + 1918\xi^2),$$

$$d_3 = -11500 + s(-3475\xi + 7674\xi^2),$$

$$d_4 = -7185 - 57500\xi - 55300\xi^2 + s(-11500\xi^2 + 1580\xi^3 + 38916\xi^4)$$

$$d_5 = -81075 - 48760\xi + 5532\xi^2 + s(-6532\xi^2 + 13616\xi^3 + 6348\xi^4)$$

$$d_6 = -11676 - 4090\xi + 2268\xi^2 + s(7\xi^2 + 1380\xi^3)$$

$$d_7 = -575 - 5260\xi + 472\xi^2 + 552\xi^3 + s(-92\xi^2 + 598\xi^3)$$

$$d_8 = -115 - 420\xi + 184\xi^2 + 46s\xi^2, \tag{A10}$$

dengan $s = \sec^2\theta$. Kita berhasrat untuk menunjukkan bahawa (A8) adalah sentiasa bernilai positif yang akan

mengimplikasikan (4) sebagai positif pada perubahan $t \in [0,1]$. Dengan menggunakan Teorem Nilai Pertengahan (Mean Value Theorem), kita dapat membuktikan bahawa $d_j, j = 2,3,4,5,6,7,8$ adalah sentiasa positif. Menggunakan $\xi = \frac{17}{8} + n, n \in [0, \infty)$, bagi mewakili $\xi \geq \frac{17}{8}$, maka diperoleh bahawa Limit d_j dan Limit d_j adalah positif. Serta diperoleh bahawa $\frac{\partial d_j}{\partial s}$ pada satu tandaan (positif). Ini jelas menunjukkan bahawa d_j adalah positif. Selanjutnya ia membawa kepada $c_j, j = 0,1,\dots,8$ bernilai positif. Oleh kerana Θ adalah sebagaimana diberikan oleh (A8), ini mengimplikasikan bahawa pengangka $\chi(t)$ juga bernilai positif, akhirnya $\kappa'(t)$ bernilai positif. Sebagai kesimpulannya, lengkung kuartik Bezier yang memenuhi (1), (6), mempunyai terbitan pertama kelengkungan yang bernilai positif, juga bermaksud lengkung mempunyai kelengkungan yang menokok secara monoton.

LAMPIRAN B

Pembinaan pasu dirujuk dengan bantuan 7 bulatan yang menghasilkan 6 segmen lengkung peralihan bentuk-S. Biarkan $C_i, i = 0,1,2,3,4,5,6$ sebagai pusat bulatan sebagaimana yang ditunjukkan pada Rajah 8. Berikut adalah koordinat-koordinat pusat serta jejari masing-masing yang digunakan; $C_0 = (-15,3), C_1 = (-20,33), C_2 = (-12,28), C_3 = (-8,50), C_4 = (-12,65), C_5 = (0,80), C_6 = (-10,96)$ dan $r_0 = 3, r_1 = 10, r_2 = 2, r_3 = 2, r_4 = 8, r_5 = 10, r_6 = 6$.

Katakan pasangan $(x(r_i,t), y(r_i,t))$ dan $(-x(r_{i+1},t), -y(r_{i+1},t))$ bagi satu lengkung peralihan ditandakan sebagai $S_i(r_i, r_{i+1}, \xi_i, \theta_i, t)$. Manakala hasil transformasi S_i iaitu $S_i'(r_i, r_{i+1}, \xi_i, \theta_i, t)$ adalah segmen lingkaran peralihan yang menghubungkan C_i dan C_{i+1} , dengan ξ_i dan θ_i bagi setiap segmen diperoleh daripada persamaan (16). Dengan menggunakan operator transformasi berikut;

$$\text{Putaran, } P(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 1 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Translasi, } T(h,k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Refleksi pada paksi } -x \ R(0, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maka dengan menggunakan koordinat homogen bagi S_i , segmen S_i' diperoleh melalui operasi matrik berikut:

$$S_0' == S_0(r_0, r_1, 2.5903, 45^\circ, t) R(0, -1) \\ P(-0.9175)T\left(-\frac{210}{13}, \frac{129}{3}\right),$$

$$S_1' == S_1(r_1, r_2, 2.0909, 45^\circ, t) P(3.5300) \\ T\left(-\frac{40}{3}, \frac{91}{2}\right),$$

$$S_2' == S_2(r_2, r_2, 2.1826, 30^\circ, t) R(0, -1) \\ P(-1.5081)T(-10, 49),$$

$$S_3' == S_3(r_3, r_4, 2.1868, 45^\circ, t) R(0, -1) \\ P(-2.0862)T\left(-\frac{40}{5}, 53\right),$$

$$S_4' == S_4(r_4, r_5, 2.3418, 20^\circ, t) R(0, -1) \\ P(-0.9879)T\left(-\frac{20}{3}, \frac{215}{3}\right),$$

$$S_5' == S_5(r_5, r_6, 2.3030, 30^\circ, t) P(-2.0892) \\ T\left(-\frac{25}{4}, 90\right).$$

RUJUKAN

Artin, E. 1957. *Geometric Algebra*. New York: Interscience.
 Azhar, A., Gobithasan, R. & Jamaludin, M.A. 2007. G^2 Transition curve using Quartic Bezier Curve. Dlm: *Proceeding of CGIV07*, Bangkok, Thailand, 2-5 Ogos.
 Farin, G. 1997. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*. 4th ed. New York: Academic Press.
 Gibreel, G.M., Easa, S.M., Hassan, Y. & El-Dimeery, I.A. 1999. State of the art of highway geometric design consistency. *ASCE Journal of Transportation Engineering* 124(4): 305-313.
 Habib, Z. & Sakai, M. 2003. Family of G^2 cubic transition curves. Dlm: *Proceeding of GMAG'03-UK*, USA.
 Kang, Y.W. & Jamaludin M.A. 2003. Rumus am lingkaran kubik Bezier satahan. *Jurnal Teknologi* 38(C): 15-28.
 Kostov, V. & Degtiariova-Kostova, E. 1995. *Some properties of Clothoids*. INRIA Research Report No. 3411; Sophia Antipolis, France, December.
 Marsh, D. 1999. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*. London: Springer-Verlag Limited.
 Tari, E. & Baykal, O. 2005. A new transition curve with enhanced properties. *Canadian Journal of Civil Engineering* 32(5): 913-923.
 Walton, D.J. & Meek, D.S. 1996a. A planar cubic Bezier spiral. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 72: 85-100.
 Walton, D.J. & Meek, D.S. 1996b. A Pythagorean hodograph quintic spiral. *Journal of Computer Aided Design* 72(12): 943-950.
 Walton, D.J. & Meek, D.S. 2004. A generalisation of the Pythagorean hodograph quintic spiral. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 172: 271-287.
 Walton, D.J. & Meek, D.S. 2007. G^2 curve design with a pair of Pythagorean hodograph quintic spiral segments. *Journal of Computer Aided Geometric Design* 24: 267-285.

- Walton, D.J., Meek, D.S. & Ali, J.M. 2003. Planar G^2 transition curves composed of cubic Bezier spiral segments. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 157: 453-476.
- Yao, Z. & Joneja, A. 2007. Path generation for high speed machining using spiral curves. *Journal Computer-Aided Design & Applications* 4(1-4): 191-198.

Azhar Ahmad
Fakulti Sains Dan Matematik
Universiti Pendidikan Sultan Idris
35900 Tanjung Malim, Perak
Malaysia

Jamaludin Md Ali
Sekolah Sains Matematik
Universiti Sains Malaysia
11800 Minden, Pulau Pinang
Malaysia

*Pengarang untuk surat-menyurat; email: azhar.ahmad@fsmt.ups.edu.my

Diserahkan: 21 Julai 2011
Diterima: 10 Februari 2013