

## Kaedah Pasangan 4(3) Runge-Kutta-Nyström untuk Masalah Nilai Awal Berkala

(A 4(3) Pair Runge-Kutta-Nyström Method for Periodic Initial Value Problems)

NORAZAK SENU\*, MOHAMED SULEIMAN, FUDZIAH ISMAIL & MOHAMED OTHMAN

### ABSTRAK

*Kaedah baru pasangan benaman 4(3) tahap-empat berperingkat empat tak tersirat Runge-Kutta-Nyström (RKN) diterbitkan untuk mengamir persamaan pembezaan peringkat dua berbentuk  $y'' = f(x, y)$  dengan penyelesaian bentuk berkala. Dipersembahkan kaedah yang bercirikan serakan berperingkat tinggi serta pekali ralat pangkasan utama yang 'kecil'. Analisis kestabilan bagi kaedah yang diterbitkan juga diberikan. Perbandingan keputusan berangka antara kaedah yang dihasilkan dengan kaedah RK4(3) dan RKN4(3)D menunjukkan kaedah yang baru ini berkecekapan lebih baik daripada segi penilaian fungsi dan masa pelaksanaan.*

*Kata kunci: Kaedah Runge-Kutta-Nyström; penyelesaian berkala; serakan*

### ABSTRACT

*A new embedded 4(3) pair explicit four-stage fourth-order Runge-Kutta-Nyström (RKN) method was developed to integrate second-order differential equations of the form  $y'' = f(x, y)$  where the solution was oscillatory. Presented is a method which has high order dispersion with a 'small' principal local truncation error coefficient. The stability analysis of the method derived is also given. Numerical comparisons of this new method with RK4(3) and RKN4(3)D methods show its clear advantage in terms of function evaluations and computation time.*

*Keywords: Oscillatory solutions; Phase-lag; Runge-Kutta-Nyström methods*

### PENGENALAN

Kaedah berangka untuk persamaan pembezaan biasa (PPB) yang terbitannya tidak wujud secara tak tersirat dikaji. Pertimbangan:

$$y'' = f(x, y), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \quad (1)$$

dan diketahui bahawa penyelesaiannya adalah berbentuk kalaan. Masalah tersebut biasanya muncul dalam bidang kejuruteraan dan sains gunaan seperti mekanik kuantum, elastodinamik, teori fizik dan elektronik. Secara umum masalah bentuk (1) yang mempunyai penyelesaian berkala boleh dibahagikan kepada dua kelas. Kelas pertama adalah masalah yang mana tempoh kalaannya diketahui. Oleh itu, beberapa kelas kaedah berangka seperti suai secara eksponen atau suai secara fasa boleh digunakan. Beberapa kertas membincangkan kaedah ini (Franco 2003; Van de Vyver 2007a; 2007b). Kelas kedua yang kalaan penyelesaian tidak diketahui. Untuk masalah dalam kelas kedua ini, kaedah mempunyai ciri tertentu seperti P-kestabilan atau serakan minimum boleh digunakan. Ianya juga boleh digunakan untuk setiap masalah berkala walaupun frekuensi tidak diketahui. Beberapa kaedah berangka dalam jenis ini telah dicadangkan oleh Van der Houwen & Sommeijer (1987) dan Simos et al. (1994).

Walau bagaimanapun, kaedah yang diterbitkan dalam van der Houwen & Sommeijer (1987) dan Simos et al. (1994) dibangunkan untuk algoritma dengan saiz langkah tetap, manakala Dormand et al. (1987) telah menerbitkan pasangan benaman 4(3) RKN tanpa mengambilkira unsur serakan. Oleh itu, dalam makalah ini penekanan diberi kepada pasangan benaman RKN dengan serakan berperingkat tinggi berpeka malar pada kos tahap-empat per langkah untuk menyelesaikan masalah berkala.

Apabila menyelesaikan (1) secara berangka, kaedah peringkat aljabar digunakan oleh sebab ia merupakan ciri utama bagi mencapai kejituan tinggi. Oleh itu, adalah perlu bagi mendapatkan kaedah RKN tahap rendah dengan peringkat semaksimum mungkin. Ini akan meminimumkan kos pengiraan. Tambahan pula, jika diketahui penyelesaian (1) adalah berbentuk berkala, maka adalah satu keperluan untuk mempertimbangkan unsur serakan dan lesapan. Kedua-duanya merupakan ralat pangkasan selain ralat pangkasan disebabkan oleh peringkat aljabar. Ralat pertama adalah merupakan sudut antara penyelesaian sebenar dengan penyelesaian hampiran, sementara ralat kedua merupakan jarak antara penyelesaian kitaran piawai. Tumpuan kajian ini adalah untuk menerbitkan kaedah dengan serakan berperingkat tinggi.

Di dalam bahagian berikut, penerbitan kaedah benaman tak tersirat RKN dengan kaedah tahap-empat berperingkat tiga dibenamkan ke dalam kaedah tahap-empat berperingkat empat dengan serakan berperingkat lapan dibincangkan. Pekali kaedah diberikan dalam bentuk jadual Butcher. Seterusnya ujian berangka ke atas masalah persamaan pembezaan peringkat dua yang mempunyai penyelesaian bentuk berkala dilaksanakan.

TEORI UMUM

Kaedah tak tersirat Runge-Kutta-Nyström (RKN) untuk pengamiran berangka masalah nilai awal diberi sebagai:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h y'_n + h^2 \sum_{i=1}^s b_i k_i \\
 y'_{n+1} &= y'_n + h \sum_{i=1}^s b'_i k_i,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

dengan

$$k_i = f \left( x_n + c_i h, y_n + c_i h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) \quad i = 1, \dots, s.$$

Ianya boleh diwakili oleh *quadruple*  $(c, A, b, b')$  dengan  $c, b, b' \in \mathbb{R}^s, A \in \mathbb{R}^{s \times s}$  dan  $s$  adalah tahap bagi kaedah. Pasangan benaman  $q(p)$  kaedah RKN adalah berdasarkan kepada kaedah  $(c, A, b, b')$  berperingkat  $q$  dan satu lagi kaedah RKN  $(c, A, \hat{b}, \hat{b}')$  berperingkat  $p$  ( $p < q$ ). Pasangan benaman RKN ini boleh diungkapkan sebagai tandaan Butcher dalam bentuk jadual berikut

$c$	$A$
	$b^T$
	$b'^T$
	$\hat{b}^T$
	$\hat{b}'^T$

Pasangan benaman kaedah tak tersirat RKN digunakan secara meluas dalam algoritma saiz langkah boleh-ubah kerana ianya memberikan anggaran ralat yang murah. Penganggaran ralat setempat di titik kamiran  $x_{n+1} = x_n + h$  ditentukan oleh ungkapan:

$$\delta_{n+1} = \hat{y}_{n+1} - y_{n+1}, \quad \delta'_{n+1} = \hat{y}'_{n+1} - y'_{n+1},$$

$Est = \max \left\{ \|\delta_{n+1}\|_\infty, \|\delta'_{n+1}\|_\infty \right\}$  mewakili anggaran ralat setempat untuk mengawal saiz langkah  $h$  dengan menggunakan kaedah piawai seperti diberi oleh (Hairer et al. 1993)

$$h_{n+1} = 0.9 h_n \left( \frac{Tol}{Est} \right)^{1/(p+1)}, \tag{3}$$

yang 0.9 merupakan faktor keselamatan dan Tol adalah ralat maksimum yang dibenarkan. Melalui pertimbangan ini pasangan benaman boleh dilaksanakan dalam kod langkah boleh-ubah. Jika  $Est < Tol$ , maka langkah diterima dan prosedur biasa digunakan iaitu penentuluan setempat

(atau mod peringkat-tinggi) yang mana penghampiran lebih jitu digunakan untuk mendahulukan pengamiran. Jika  $Est \geq Tol$  maka langkah ditolak dan nilai  $h$  dikemaskini menggunakan rumus (3).

ANALISIS SERAKAN, LESAPAN DAN KESTABILAN MUTLAK Alternatif bagi kaedah (2) boleh ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h y'_n + h^2 \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, Y_i), \\
 y'_{n+1} &= y'_n + h \sum_{i=1}^s b'_i f(t_n + c_i h, Y_i),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

dengan

$$Y_i = y_n + c_i h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_j).$$

Dengan menggunakan kaedah umum (4) kepada persamaan ujian  $y'' = (i\lambda)^2 y(t)$ , diperolehi hubungan rekursif seperti ditunjukkan dalam van der Houwen & Sommeijer (1987)

$$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ h y'_{n+1} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} y_n \\ h y'_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} A(z^2) & B(z^2) \\ A'(z^2) & B'(z^2) \end{bmatrix}, \quad z = \lambda h, \tag{5}$$

yang  $A, A', B$  dan  $B'$  adalah polinomial dalam  $z^2$ , dan ditentukan oleh parameter kaedah (4). Andaikan

$$R(z^2) = \text{surihan}(D) \text{ dan } S(z^2) = \text{penentu}(D).$$

Persamaan cirian merujuk kepada persamaan (5) diberi sebagai

$$\xi^2 - R(z^2) \xi + S(z^2) = 0. \tag{6}$$

Dalam analisis serakan, perbandingan dilakukan ke atas fasa  $e^{z^2}$  dengan fasa bagi punca persamaan cirian (6). Definisi berikut telah diperkenalkan oleh van der Houwen & Sommeijer (1987).

*Definisi 1* Untuk kaedah RKN dan merujuk kepada persamaan cirian (6) kuantiti

$$\phi(z) = z - \cos^{-1} \left( \frac{R(z^2)}{2\sqrt{S(z^2)}} \right), \quad \alpha(z) = 1 - \sqrt{S(z^2)}.$$

adalah masing-masing merupakan serakan dan lesapan. Jika  $\phi(z) = O(z^{t+1})$ , maka kaedah RKN dikatakan mempunyai peringkat serakan  $t$  dan jika  $\alpha(z) = O(z^{u+1})$ , maka kaedah RKN dikatakan mempunyai peringkat lesapan  $u$ .

Merujuk kepada definisi (1), jika pada titik  $z$ ,  $\alpha(z) = 0$ , maka kaedah RKN disebut sifar-lesapan pada titik tersebut dan mempunyai lesapan jika sebaliknya. Ralat bagi  $\phi(z)$  akan merambat dalam proses berangka menyebabkan ketidakjitan dan seterusnya meng-akibatkan kamiran yang banyak perlu dilaksanakan. Dalam kertas ini, tumpuan

diberikan kepada meningkatkan peringkat serakan  $t$  (ditakrifkan sebagai  $\phi(z) = O(z^{t+1})$ ). Andaikan  $R(z^2)$  dan  $S(z^2)$  berbentuk seperti diberikan oleh van der Houwen & Sommeijer (1987)

$$R(z^2) = 2 - \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^4 - \alpha_3 z^6 + \dots + \alpha_i z^{2i}, \quad \alpha_i = 0 \text{ untuk } i > s, \tag{7}$$

$$S(z^2) = 1 - \beta_1 z^2 + \beta_2 z^4 - \beta_3 z^6 + \dots + \beta_i z^{2i}, \quad \beta_i = 0 \text{ untuk } i > s. \tag{8}$$

Dalam van der Houwen & Sommeijer (1987), syarat perlu bagi kaedah RKN (2) berperingkat empat yang mempunyai serakan berperingkat lapan dalam sebutan  $\alpha_i$  dan  $\beta_i$  diberikan. Hubungan berikut perlu dipatuhi dalam penerbitan kaedah peringkat empat dengan serakan peringkat lapan.

$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{12}, \beta_2 = 0, \tag{9}$$

$$\alpha_3 - \beta_3 = \frac{1}{360}, \tag{10}$$

$$\alpha_3 + 2\alpha_4 - 2\beta_3 - 2\beta_4 = \frac{29}{10080}. \tag{11}$$

Daripada takrifan lesapan dan dengan mengembangkan  $\alpha(z)$  kepada siri Taylor, maka ungkapan berikut diperolehi:

$$1 - \sqrt{S(z^2)} = \frac{\beta_1}{2} z^2 - \left( \frac{\beta_2}{2} - \frac{\beta_1^2}{8} \right) z^4 - \left( -\frac{\beta_3}{2} + \frac{\beta_1}{4} \beta_2 - \frac{\beta_1^3}{16} \right) z^6 - \left( \frac{\beta_4}{2} - \frac{\beta_1 \beta_3}{4} - \frac{\beta_2^2}{8} + \frac{3\beta_1^2 \beta_2}{16} - 5 \frac{\beta_1^4}{128} \right) z^8 + O(z^{10}). \tag{12}$$

Ungkapan (12) di atas digunakan untuk menentukan peringkat serta pekali lesapan bagi kaedah terbit. Seterusnya analisis kestabilan bagi kaedah dibincangkan. Daripada ungkapan (5), matrik  $D$  secara alternatif boleh ditulis sebagai

$$D(H) = \begin{pmatrix} 1 + Hb^T (I - HA)^{-1} e & 1 + Hb^T (I - HA)^{-1} c \\ Hb^T (I - HA)^{-1} e & 1 + Hb^T (I - HA)^{-1} c \end{pmatrix},$$

yang  $H = -z^2$ ,  $e = (1 \dots 1)T$ ,  $c = (c_1 \dots c_s)T$ . Matrik  $D(H)$  disebut matrik kestabilan.

Menurut Fang (2008), penyelesaian berangka sentiasa terbatas yang pekali (6) memenuhi syarat berikut

$$S(H) < 1, |R(H)| < S(H) + 1, H \in (-H_a, 0),$$

dan selang  $(-H_a, 0)$  yang memenuhi syarat tersebut dipanggil selang kestabilan mutlak.

PENERBITAN KAEDAH

Kaedah RKN tahap-empat berperingkat empat dengan serakan berperingkat lapan diterbitkan. Penerbitan kaedah

RKN peringkat tiga turut dibincangkan. Berikut adalah syarat aljabar sehingga peringkat lima seperti diberikan dalam Hairer & Wanner (1975).

$$\text{Peringkat 1} \quad \sum b'_i = 1, \tag{13}$$

$$\text{Peringkat 2} \quad \sum b_i = \frac{1}{2}, \sum b'_i c_i = \frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$\text{Peringkat 3} \quad \sum b_i c_i = \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \sum b'_i c_i^2 = \frac{1}{6}, \tag{15}$$

$$\text{Peringkat 4} \quad \frac{1}{2} \sum b_i c_i^2 = \frac{1}{24}, \frac{1}{6} \sum b'_i c_i^3 = \frac{1}{24}, \sum b'_i a_{ij} c_j = \frac{1}{24}, \tag{16}$$

$$\text{Peringkat 5} \quad \frac{1}{6} \sum b_i c_i^3 = \frac{1}{120}, \sum b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{120}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{24} \sum b'_i c_i^4 = \frac{1}{120}, \frac{1}{4} \sum b'_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{120}, \frac{1}{2} \sum b'_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{120}.$$

Semua indeks adalah daripada 1 sehingga  $s$ . Untuk kebanyakan kaedah  $c_i$  perlu mematuhi

$$\frac{1}{2} c_i^2 = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad (i = 1, \dots, s). \tag{18}$$

Penerbitan pasangan benaman adalah berdasarkan strategi yang telah diperkenalkan oleh Dormand et al. (1987) sebagai panduan untuk menerbitkan kaedah yang baik.

Sekarang pertimbangkan kaedah tahap-empat berperingkat empat ( $p = 4$ ) dengan serakan berperingkat lapan ( $t = 8$ ). Untuk mencapai peringkat serakan lapan, hubungan (9)-(11) perlu dipatuhi. Hubungan (9) sedia dipatuhi disebabkan syarat kekonsistanan bagi kaedah. Oleh itu kaedah secara automatik mempunyai serakan berperingkat empat. Seterusnya tiga belas persamaan tak linear (sebelas adalah daripada syarat aljabar (13)-(16), (18) dan dua daripada hubungan serakan (10) dan (11) berserta enam belas pemboleh ubah untuk diselesaikan. Di sini terdapat tiga darjah kebebasan pemboleh ubah. Dengan menetapkan  $c_4 = 1$ , biar  $c_2$  dan  $c_1$  sebagai parameter bebas seterusnya diperolehi polinomial kestabilan hanya bersandar kepada  $c_2$ . Menerusi pemerhatian, pemilihan  $c_2 = \frac{9}{25}$  memberikan kaedah dengan selang kestabilan yang besar. Seterusnya keluarga satu-parameter dalam sebutan  $c_3$  berikut diperolehi.

$$b_1 = \frac{506c_3 + 49}{4968c_3}, b_2 = \frac{625(1150c_3 - 463)}{79488(25c_3 - 9)},$$

$$b_3 = \frac{-49}{552c_3(-34c_3 + 9 + 25c_3^2)}, b_4 = \frac{7(46c_3 - 39)}{8832(c_3 - 1)},$$

$$b'_1 = \frac{4c_3 + 7}{180c_3}, b'_2 = \frac{15625(2c_3 - 1)}{1728(25c_3 - 9)},$$

$$b'_3 = \frac{-7}{12c_3(-34c_3 + 9 + 25c_3^2)}, b'_4 = \frac{46c_3 - 39}{192(c_3 - 1)},$$

$$a_{21} = \frac{81}{1250}, a_{31} = -\frac{c_3(-1618875 + 722923c_3)}{7547904},$$

$$a_{32} = \frac{179875}{7547904}(25c_3 - 9)c_3,$$

$$a_{41} = \frac{1205568c_3^2 + 4754875c_3 - 4672512}{1550016(46c_3 - 39)c_3},$$

$$a_{42} = \frac{125(6888960c_3^2 - 9476063c_3 + 3116655)}{1550016(-1389c_3 + 351 + 1150c_3^2)},$$

$$a_{43} = \frac{624(c_3 - 1)}{23(-1389c_3 + 351 + 1150c_3^2)c_3}$$

yang

$$\|\tau^{(5)}\|_2 = 1.993082977 \times 10^{-3}$$

dan

$$\|\tau^{(5)}\|_2 = \frac{\sqrt{10335247663104c_3^2 - 17717567422464c_3 + 58586558561881}}{3306700800}$$

Fungsi  $\|\tau^{(5)}\|_2$  mempunyai nilai minimum  $2.159542344 \times 10^{-3}$  di  $c_3 = \frac{6}{7}$ . Jika pekali kecil serta positif dipertimbangkan, maka  $c_3 = \frac{4}{5}$  adalah pilihan yang terbaik yang mana  $\|\tau^{(5)}\|_2 = 2.160256826 \times 10^{-3}$ . Kaedah mempunyai lesapan berperingkat lima dengan pemalar lesapan adalah  $\frac{4001}{1365073920}z^6 + O(z^8)$ . Selang kestabilan mutlak dianggarkan  $(-7.786917250.0)$ .

Seterusnya, kaedah RKN peringkat tiga diperlukan bagi penganggaran ralat untuk meng-awal saiz langkah bagi kod boleh-ubah. Menggunakan nilai  $A$  dan  $c$  bagi kaedah diterbitkan dalam kertas ini, kaedah peringkat-tiga dengan serakan berperingkat empat diterbitkan. Andaikan  $\hat{b}_4 = \frac{1}{125}, \hat{b}'_4 = \frac{3}{50}$ , dan  $\hat{b}_3, \hat{b}'_3$ , sebagai parameter bebas, seterusnya syarat aljabar peringkat tiga berserta nilai  $A$  dan  $c$  berkenaan diselesaikan secara serentak dan menghasilkan

$$\hat{b}_1 = \frac{173}{3375} + \frac{11}{9}\hat{b}_3, \hat{b}_2 = \frac{119}{270} - \frac{20}{9}\hat{b}_3,$$

$$\hat{b}'_1 = \frac{143}{450} + \frac{11}{9}\hat{b}'_3, \hat{b}'_2 = \frac{23}{18} - \frac{20}{9}\hat{b}'_3.$$

Daripada penyelesaian di atas, fungsi  $\|\hat{\tau}^{(4)}\|_2$  dan  $\|\hat{\tau}'^{(4)}\|_2$  diberi sebagai

$$\|\hat{\tau}^{(4)}\|_2 = \frac{\sqrt{(-683 + 13200\hat{b}_3)^2}}{7500},$$

dan

$$\|\hat{\tau}'^{(4)}\|_2 = \frac{\sqrt{1988112948891590416 - 10321430735389826360\hat{b}'_3 + 13415833595858697025\hat{b}'_3{}^2}}{3603600000}$$

Fungsi di atas mempunyai nilai minimum masing-masing sifar dan  $0.001500201549$  di  $\hat{b}_3 = \frac{683}{13200} \approx 0.05174242424$  dan  $\hat{b}'_3 = \frac{8530108045776716}{22174931563402805} \approx 0.3846734779$ .

Untuk nilai  $\|\hat{\tau}^{(4)}\|_2$  dan  $\|\hat{\tau}'^{(4)}\|_2$  yang kecil dan daripada ujian berangka untuk pasangan yang optimum, maka  $\hat{b}_3 = \frac{1}{24}$  dan  $\hat{b}'_3 = \frac{479}{1320}$  adalah pilihan yang terbaik. Dengan nilai ini diperolehi

$$\|\hat{\tau}^{(4)}\|_2 = 2.066666667 \times 10^{-3}$$

dan

$$\|\hat{\tau}'^{(4)}\|_2 = 2.675433022 \times 10^{-3},$$

serta selang kestabilan mutlak adalah  $(-7.329000167, 0)$ . Seterusnya menghasilkan kaedah seperti dalam Jadual 1 dan ditandakan sebagai RKN4(3)S.

JADUAL 1. Kaedah RKN4(3)S

9	81			
25	1250			
4	5202683	395725		
5	47174400	1886976		
	606553	34538125	780	
1	17050176	187551936	2783	
	2269	285625	1225	77
	19872	874368	24288	8832
	17	3125	175	11
	144	6336	528	192
	338	19	1	1
	3375	54	25	125
	679	140	479	1
	5400	297	1320	25

UJIAN BERANGKA

Untuk menilai keberkesanan kaedah terterbit, beberapa model masalah yang mempunyai penyelesaian berbentuk berkala diuji. Kaedah baru telah diimplimentasikan menggunakan kod langkah boleh-ubah dan perbandingan dilakukan dengan kaedah RKN4(3)D daripada jenis yang sama tetapi dibangunkan untuk menyelesaikan masalah umum yang diterbitkan oleh Dormand et al. (1987) dan kaedah RK4(3) yang diterbitkan oleh Prince seperti diberi dalam Dormand (1996). Tandaan berikut digunakan dalam Jadual 2-5.

- RK4(3) : Pasangan benaman 4(3) seperti diberi di dalam Dormand (1996).
- RKN4(3)D : Pasangan benaman 4(3) diterbitkan oleh Dormand et al. (1987).
- RKN4(3)S : Pasangan benaman 4(3) yang baru diterbitkan.

Masalah 1

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -64u(t), u(0) = 1, u'(0) = -2$$

Penyelesaian tepat  $u(t) = -\frac{1}{4}\sin(8t) + \cos(8t)$

#### Masalah 2

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = v^2u(t) + (v^2 - 1)\sin(t), \quad u(0) = 1, u'(0) = v + 1, t \geq 0,$$

yang  $v \gg 1$ . Penyelesaian tepat  $u(t) = \cos(vt) + \sin(t)$ . Untuk kes  $v = 10$ .

#### Masalah 3

$$\frac{d^2y_1(t)}{dt^2} + y_1(t) = 0.001\cos(t), \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0$$

$$\frac{d^2y_2(t)}{dt^2} + y_2(t) = 0.001\sin(t), \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0.9995$$

Penyelesaian tepat  $y_1(t) = \cos(t) + 0.0005t\sin(t)$ ,  $y_2(t) = \sin(t) - 0.0005t\cos(t)$ ,

#### Masalah 4

$$y_1'' = \frac{-y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0$$

$$y_2'' = \frac{-y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1,$$

Penyelesaian tepat  $y_1(t) = \cos(t)$ ,  $y_2(t) = \sin(t)$

Kesemua masalah di atas diimplimentasi terhadap toleransi  $10^{-2i}$ ,  $i = 1 \dots 5$  dan selang kamiran  $0 \leq t \leq 20$ . Daripada Jadual 2 hingga 5, dapat diperhatikan bahawa kaedah baru terbit adalah lebih cekap untuk mengamir persamaan pembezaan peringkat dua yang mempunyai penyelesaian bentuk berkala berbanding dengan kaedah yang diterbitkan oleh Dormand et al. (1987), RKN4(3)D dan kaedah benaman Runge-Kutta, RK4(3) yang diterbitkan oleh Prince diberi dalam Dormand (1996) daripada segi bilangan langkah dan penilaian fungsi. Ini adalah disebabkan penggunaan kaedah RK4(3) memerlukan sistem persamaan pembezaan peringkat dua diturunkan kepada sistem persamaan pembezaan peringkat satu dan menjadikan dimensi sistem bertambah sekali ganda. Manakala kaedah RKN4(3)D adalah kurang jitu berbanding kaedah baru dengan serakan berperingkat tinggi dipertimbangkan. Oleh itu penumpuan bagi kaedah baru adalah lebih pantas seterusnya memerlukan bilangan kamiran yang sedikit.

Seterusnya daripada Rajah 1, dapat disimpulkan bahawa kaedah baru RKN4(3)S adalah yang terbaik dengan kuantiti masa pelaksanaan mengurang sebanyak  $> 50\%$  daripada kaedah RK4(3) dan mengurang sebanyak  $> 28\%$  daripada kaedah RKN4(3)D bagi semua masalah diuji.

JADUAL 2. Perbandingan keputusan berangka untuk masalah 1 antara kaedah RKN4(3)S, RKN4(3)D dan RK4(3)

TOL	KDH	LKH	FUN	LKHG	RMAKS	MASA
$10^{-2}$	RKN4(3)S	212	998	62	2.257861(-2)	0.002057
	RKN4(3)D	306	1392	56	1.190210(-2)	0.002404
	RK4(3)	306	1738	52	7.888105(-2)	0.010440
$10^{-4}$	RKN4(3)S	646	2770	62	5.223835(-4)	0.004254
	RKN4(3)D	914	3770	38	1.809096(-4)	0.005437
	RK4(3)	942	4922	53	3.764687(-4)	0.038003
$10^{-6}$	RKN4(3)S	2006	8084	20	9.024337(-6)	0.015108
	RKN4(3)D	2868	11475	1	1.950071(-6)	0.005437
	RK4(3)	2960	14808	2	1.364481(-6)	0.058419
$10^{-8}$	RKN4(3)S	6340	25366	2	9.529673(-8)	0.033083
	RKN4(3)D	9067	36271	1	1.949266(-8)	0.046167
	RK4(3)	9370	46858	2	4.275421(-9)	0.060133
$10^{-10}$	RKN4(3)S	20050	80206	2	9.527306(-10)	0.102265
	RKN4(3)D	28670	114683	1	1.956607(-10)	0.143938
	RK4(3)	29634	148178	2	1.591882(-11)	0.187763

TOL : Toleransi ralat yang ditetapkan.  
 KDH : Kaedah yang digunakan.  
 LKH : Bilangan langkah diambil.  
 FUN : Bilangan panggilan fungsi.  
 LKHG : Bilangan langkah yang gagal.  
 RMAKS: Kuantiti maksimum ralat sejagat.  
 MASA : Masa yang diambil.

JADUAL 3. Perbandingan keputusan berangka untuk masalah 2 antara kaedah RKN4(3)S, RKN4(3)D dan RK4(3)

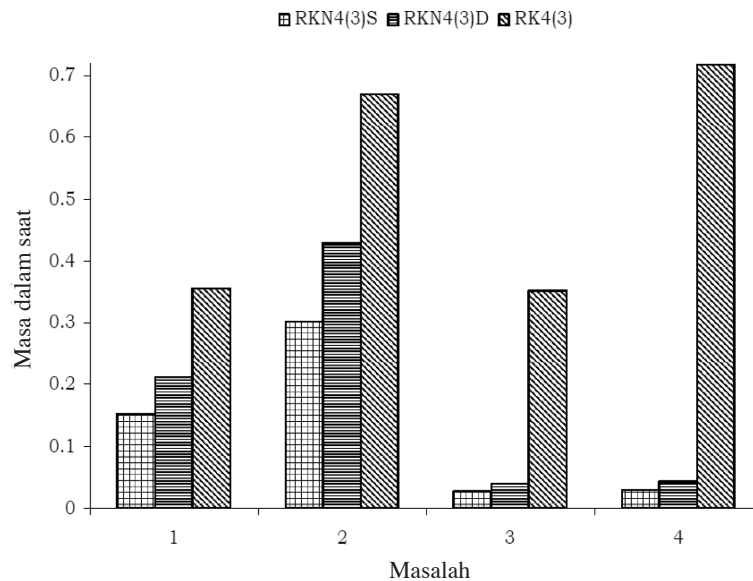
TOL	KDH	LKH	FUN	LKHG	RMAKS	MASA
10 <sup>-2</sup>	RKN4(3)S	302	1400	64	2.277496(-2)	0.003216
	RKN4(3)D	432	1947	73	1.290377(-2)	0.004075
	RK4(3)	435	2475	75	1.006148(-1)	0.023166
10 <sup>-4</sup>	RKN4(3)S	923	3986	98	5.114848(-4)	0.007819
	RKN4(3)D	1297	5293	35	1.993121(-4)	0.010268
	RK4(3)	1341	6969	66	4.399910(-4)	0.027595
10 <sup>-6</sup>	RKN4(3)S	2863	11578	42	9.598424(-6)	0.021575
	RKN4(3)D	4080	16323	1	2.109268(-6)	0.030038
	RK4(3)	4217	21093	2	1.632397(-6)	0.062080
10 <sup>-8</sup>	RKN4(3)S	9040	36166	2	1.066380(-7)	0.065022
	RKN4(3)D	12900	51603	1	2.107851(-8)	0.093164
	RK4(3)	13353	66773	2	5.116588(-9)	0.153388
10 <sup>-10</sup>	RKN4(3)S	28592	114374	2	1.067684(-9)	0.204868
	RKN4(3)D	40794	163179	1	2.133791(-10)	0.291990
	RK4(3)	42231	211163	2	2.846257(-11)	0.403697

JADUAL 4. Perbandingan keputusan berangka untuk masalah 3 antara kaedah RKN4(3)S, RKN4(3)D dan RK4(3)

TOL	KDH	LKH	FUN	LKHG	RMAKS	MASA
10 <sup>-2</sup>	RKN4(3)S	18	72	0	4.186799(-3)	0.000984
	RKN4(3)D	27	108	0	5.375030(-3)	0.000865
	RK4(3)	26	130	0	8.613256(-3)	0.001191
10 <sup>-4</sup>	RKN4(3)S	54	216	0	1.448268(-5)	0.001321
	RKN4(3)D	83	332	0	5.495061(-5)	0.001399
	RK4(3)	79	395	0	3.018789(-5)	0.011932
10 <sup>-6</sup>	RKN4(3)S	167	668	0	6.348965(-8)	0.002388
	RKN4(3)D	261	1044	0	5.500774(-7)	0.003096
	RK4(3)	246	1230	0	9.638183(-8)	0.037643
10 <sup>-8</sup>	RKN4(3)S	526	2104	0	3.545786(-10)	0.005756
	RKN4(3)D	823	3292	0	5.501667(-9)	0.008647
	RK4(3)	774	3870	0	3.051522(-10)	0.125714
10 <sup>-10</sup>	RKN4(3)S	1660	6640	0	2.649936(-12)	0.016405
	RKN4(3)D	2600	10400	0	5.499112(-11)	0.025656
	RK4(3)	2446	12230	0	9.720003(-13)	0.174760

JADUAL 5. Perbandingan keputusan berangka untuk masalah 4 antara kaedah RKN4(3)S, RKN4(3)D dan RK4(3)

TOL	KDH	LKH	FUN	LKHG	RMAKS	MASA
$10^{-2}$	RKN4(3)S	20	80	0	4.956770(-1)	0.00100
	RKN4(3)D	27	108	0	1.316847(-1)	0.000964
	RK4(3)	26	130	0	5.142714(-1)	0.001094
$10^{-4}$	RKN4(3)S	54	216	0	1.091337(-2)	0.001371
	RKN4(3)D	83	332	0	7.963055(-4)	0.001476
	RK4(3)	79	395	0	5.901451(-4)	0.041760
$10^{-6}$	RKN4(3)S	167	668	0	7.245851(-5)	0.002535
	RKN4(3)D	261	1044	0	6.170785(-6)	0.003338
	RK4(3)	247	1235	0	2.721824(-6)	0.143423
$10^{-8}$	RKN4(3)S	526	2108	0	5.705374(-7)	0.006197
	RKN4(3)D	823	3292	0	5.589340(-8)	0.009849
	RK4(3)	775	3875	0	2.280858(-8)	0.212893
$10^{-10}$	RKN4(3)S	1661	6644	0	5.277904(-9)	0.017826
	RKN4(3)D	2602	10408	0	5.402536(-10)	0.027977
	RK4(3)	2448	12240	0	2.170117(-10)	0.318903



RAJAH 1. Perbandingan masa pelaksanaan CPU diambil (dalam saat) bagi semua kaedah untuk masalah 1-4

#### KESIMPULAN

Dalam kertas ini kaedah benaman tak tersirat RKN4(3)S dengan serakan peringkat tinggi yang sesuai untuk masalah dengan penyelesaian mempunyai fungsi bentuk berkala telah diterbitkan. Daripada Jadual 2 hingga 5 dan Rajah 1, dirumuskan bahawa kaedah baru adalah lebih cekap berbanding dengan kaedah RKN4(3)D dan RK4(3) apabila menyelesaikan masalah bentuk berkala.

#### PENGHARGAAN

Kajian ini dijalankan di bawah Geran Penyelidikan Fundamental IPTA (FRGS) (No. Projek 05-10-07-385FR). Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Kementerian Pengajian Tinggi dan Universiti Putra Malaysia di atas anugerah geran penyelidikan tersebut.

## RUJUKAN

- Dormand, J.R., El-Mikkawy, M.E.A. & Prince, P.J. 1987. Families of Runge-Kutta-Nyström Formulae. *IMA J. Numer. Anal.* 7: 235-250.
- Dormand, J.R. 1996. *Numerical Methods for Differential Equations*. Florida: CRC Press, Inc.
- Fang, Y. & Wu, X. 2008. A trigonometrically fitted Numerov-type method for second-order initial value problems with oscillating solutions. *Appl. Numer. Math.* 58: 341-351.
- Franco, J.M. 2003. A 5(3) pair of explicit ARKN methods for the numerical integration of perturbed oscillators. *J. Comput. Appl. Math.* 161: 283-293.
- Hairer, E. & Wanner, G. 1975. A Theory for Nyström Methods. *Numer. Math.* 25: 383-400.
- Hairer, S., Norsett, P. & Wanner, G. 1993. *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag.
- Simos, T.E., Dimas, E. & Sideridis, A.B. 1994. A Runge-Kutta-Nyström method for the numerical integration of special second-order periodic initial-value problems. *J. Comp. Appl. Math.* 51: 317-326.
- Van der Houwen, P.J. & Sommeijer, B.P. 1987. Explicit Runge-Kutta(-Nyström) methods with reduced phase errors for computing oscillating solutions. *SIAM J. Numer. Anal.* 24: 595-617.
- Van de Vyver, H. 2007a. A 5(3) pair of explicit Runge-Kutta-Nyström methods for oscillatory problems. *Math. Comp. Model.* 45: 708-716.
- Van de Vyver, H. 2007b. A symplectic Runge-Kutta-Nyström method with minimal phase-lag. *Physics Letters A* 367: 16-24.
- Norazak Senu\*, Mohamed Suleiman & Fudziah Ismail  
Jabatan Matematik, Fakulti Sains  
Universiti Putra Malaysia  
43400 UPM Serdang, Selangor  
Malaysia
- Mohamed Othman  
Jabatan Teknologi Komunikasi dan Rangkaian  
Fakulti Sains Komputer dan Teknologi Maklumat  
Universiti Putra Malaysia  
43400 UPM Serdang, Selangor  
Malaysia
- \*Pengarang untuk surat-menyurat; email: razak@math.upm.edu.my
- Diserahkan: 14 Ogos 2009  
Diterima: 4 November 2009