

Aliran Lapisan Sempadan Bersebelahan Plat Tegak dengan Suhu Permukaan Malar

(Boundary Layer Flow Adjacent to a Vertical Plate
with Constant Surface Temperature)

ANUAR ISHAK*

ABSTRAK

Pembentukan lapisan sempadan halaju dan terma yang dirangsang oleh aliran bebas bersebelahan plat tegak dengan suhu permukaan malar dikaji. Persamaan-persamaan menakluk dalam bentuk persamaan pembezaan separa diturunkan kepada persamaan-persamaan pembezaan biasa dengan penjelmaan keserupaan, sebelum diselesaikan secara berangka. Kedua-dua aliran membantu dan aliran menentang dipertimbangkan. Didapati bahawa penyelesaian adalah unik bagi aliran membantu, manakala penyelesaian dual wujud bagi aliran menentang. Kadar pemindahan haba pada permukaan didapati meningkat dengan peningkatan kedua-dua daya keapungan dan nombor Prandtl.

Kata kunci: Lapisan sempadan; pemindahan haba; penyelesaian dual; penyelesaian keserupaan

ABSTRACT

The development of velocity and thermal boundary layers induced by a free stream adjacent to a vertical plate with constant surface temperature was studied. The governing partial differential equations were reduced to ordinary ones by a similarity transformation, before being solved numerically. Both assisting and opposing flows were considered. It was found that the solution was unique for the assisting flow, while dual solutions were found to exist for the opposing flow. The heat transfer rate at the surface was found to increase with both the buoyancy force and the Prandtl number.

Keywords: Boundary layer; dual solutions; heat transfer; similarity solution

PENDAHULUAN

Istilah “penyelesaian keserupaan” bagi aliran lapisan sempadan pertama kali diperkenalkan oleh Blasius pada tahun 1908 semasa beliau menyelesaikan satu daripada masalah penggunaan teori lapisan sempadan Prandtl (Schlichting 1979). Ideanya adalah untuk mempermudah persamaan-persamaan menakluk dengan mengurangkan bilangan pemboleh ubah tak bersandar menggunakan penjelmaan koordinat. Beranalogi dengan analisis matra, bukannya parameter, seperti nombor Reynolds, tetapi koordinat-koordinat itu sendiri dijadikan kumpulan tanpa matra yang menjadi ukuran halaju. Istilah “keserupaan” ini digunakan kerana, walaupun lapisan sempadan membesar dengan jarak x dari hujung hadapan jasad, bentuk geometri profil halaju u/U_∞ kekal serupa. Konsep yang sama kemudiannya diperluaskan kepada profil suhu. Walau bagaimanapun, bukan semua masalah mempunyai penyelesaian keserupaan kerana ia bergantung pada pelbagai faktor seperti bentuk geometri permukaan, syarat sempadan, dan keadaan pemanasan permukaan.

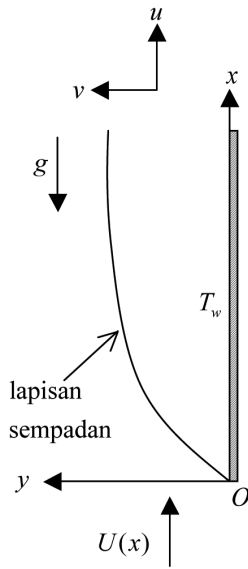
Aspek pemindahan haba bagi masalah Blasius di atas telah dipertimbangkan oleh Pohlhausen pada tahun 1921 (Schlichting 1979), dengan mengandaikan yang suhu permukaan plat adalah seragam. Masalah aliran olakan campuran bersebelahan plat tegak dengan fluks

haba permukaan ditetapkan telah dikaji oleh Merkin dan Mahmood (1989). Baru-baru ini Ishak et al. (2008a) memperluaskan masalah ini kepada kes permukaan telap dan mengkaji kesan sedutan dan semburan pada permukaan terhadap pembentukan aliran lapisan sempadan halaju dan terma.

Objektif kajian ini adalah untuk memperluaskan kajian oleh Merkin dan Mahmood (1989) kepada kes suhu permukaan ditetapkan. Walaupun persamaan menakluk yang diperoleh adalah sama, tetapi syarat sempadan yang dipertimbangkan adalah berbeza.

FORMULASI MASALAH

Pertimbangkan aliran bebas dengan halaju $U(x)$ mengalir di sepanjang plat tegak semi terhingga, di dalam bendalir likat tak mampat dengan suhu persekitaran malar T_∞ seperti digambarkan dalam Rajah 1. Suhu permukaan plat T_w diandaikan malar, manakala halaju aliran bebas adalah dalam bentuk $U(x) = ax^m$, dengan $a (>0)$ dan m adalah pemalar, dan x adalah jarak dari hujung hadapan plat. Dengan andaian-andaian ini, bersama-sama dengan penghampiran lapisan sempadan dan penghampiran Boussinesq, persamaan keselantaran, momentum dan tenaga boleh ditulis sebagai (lihat Schlichting (1979))



RAJAH 1. Model fizikal dan sistem koordinat

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty), \tag{2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{3}$$

tertakluk kepada syarat-syarat sempadan

$$\begin{aligned} u = 0, v = 0, T = T_w & \text{ pada } y = 0, \\ u \rightarrow U(x), T \rightarrow T_\infty & \text{ apabila } y \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

dengan u dan v masing-masing adalah komponen halaju dalam arah x dan y , manakala T, g, ν, β dan α masing-masing adalah suhu bendalir dalam lapisan sempadan, pecutan graviti, kelikatan kinematik, pekali kembangan terma dan pekali resapan terma.

Untuk memperoleh penyelesaian keserupaan bagi persamaan menakluk (1) – (3) tertakluk kepada syarat sempadan (4), penjelmaan keserupaan berikut diperkenalkan (lihat Schlichting (1979) dan Ishak et al. (2007)):

$$\eta = y \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2}, \quad f(\eta) = \frac{\Psi}{(\nu x U)^{1/2}}, \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \tag{5}$$

dengan η adalah pemboleh ubah keserupaan, f adalah fungsi strim tanpa matra, θ adalah suhu tanpa matra dan Ψ adalah fungsi strim yang ditakrifkan sebagai $u = \partial\Psi/\partial y$ dan $v = -\partial\Psi/\partial x$. Dengan takrifan yang sedemikian, persamaan keselanjaran (1) dipenuhi. Seterusnya, persamaan momentum (2) dan persamaan tenaga (3) masing-masing terturun kepada persamaan pembezaan biasa

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) + \lambda \theta = 0. \tag{6}$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{m+1}{2} f \theta' = 0, \tag{7}$$

dengan $Pr = \nu/\alpha$ adalah nombor Prandtl dan λ adalah parameter keapungan atau parameter olakan campuran yang ditakrifkan sebagai

$$\lambda = \frac{g\beta}{a^2} (T_w - T_\infty) x^{1-2m} = \frac{Gr_x}{Re_x^2}, \tag{8}$$

yang $Gr_x = g\beta(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2$ dan $Re_x = Ux/\nu$ masing-masing adalah nombor Grashof setempat dan nombor Reynolds setempat. Syarat sempadan (4) terturun kepada

$$\begin{aligned} f(0) = 0, f'(0) = 0, \theta(0) = 1, \\ f'(\eta) \rightarrow 1, \theta(\eta) \rightarrow 0 \text{ apabila } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Supaya penyelesaian keserupaan wujud, semua parameter dalam persamaan (6) dan (7) tertakluk kepada syarat sempadan (9) mestilah bebas daripada sebutan x . Diperhatikan daripada persamaan (6), (7) dan (9) bahawa hanya tiga parameter terlibat, iaitu m, λ dan Pr . Oleh sebab m dan Pr adalah pemalar, maka penyelesaian keserupaan boleh diperoleh jika λ bebas daripada sebutan x . Ini dapat dilakukan dengan mengambil $m = 1/2$, iaitu aliran luar dalam bentuk $U(x) \sim \sqrt{x}$. Dengan nilai m ini, λ dalam persamaan (8) menjadi

$$\lambda = \frac{g\beta}{a^2} (T_w - T_\infty) = \text{pemalar}. \tag{10}$$

Jika λ bergantung pada x , iaitu apabila $m \neq 1/2$, penyelesaian yang diperoleh adalah penyelesaian keserupaan setempat (lihat Ishak et al. (2008b)). Dalam kajian ini, hanya nilai $m = 1/2$ dipertimbangkan. Jika $T_w > T_\infty$ (iaitu $\lambda > 0$), aliran bebas dan daya keapungan adalah dalam arah yang sama, oleh itu pembentukan lapisan sempadan dibantu oleh daya keapungan (aliran membantu), perkara sebaliknya berlaku bagi aliran menentang, manakala $T_w = T_\infty$ (iaitu $\lambda = 0$) merujuk kepada aliran paksa, iaitu pembentukan lapisan sempadan adalah dihasilkan sepenuhnya oleh aliran bebas yang dijana oleh daya luar.

Kuantiti-kuantiti fizikal yang diminati ialah pekali geseran kulit C_f dan nombor Nusselt setempat Nu_x yang ditakrifkan sebagai

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U^2 / 2}, \quad Nu_x = \frac{x q_w}{k(T_w - T_\infty)}, \tag{11}$$

dengan tegasan ricih permukaan τ_w dan fluks haba permukaan q_w diberi oleh

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \tag{12}$$

yang μ adalah kelikatan dinamik dan k adalah kekonduksian terma. Menggunakan kuantiti-kuantiti tanpa matra daripada (5), diperoleh

$$\frac{1}{2} C_f Re_x^{1/2} = f''(0), \quad Nu_x / Re_x^{1/2} = -\theta'(0). \tag{13}$$

KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN

Persamaan (6) dan (7) tertakluk kepada syarat sempadan (9) diselesaikan secara berangka menggunakan kaedah Runge-Kutta-Fehlberg dengan teknik meluru. Kaedah ini telah digunakan dengan jayanya oleh penulis untuk menyelesaikan pelbagai masalah aliran lapisan sempadan dan pemindahan haba (Ishak 2009a, 2009b, 2010). Kesukaran utama dalam kajian ini adalah memperoleh penyelesaian kedua bagi aliran menentang ($\lambda < 0$). Teknik meluru memerlukan kita “meneka” nilai $f''(0)$ dan $-\theta'(0)$ secara serentak. Bagi membantu supaya tekaan awal dapat dilakukan dengan tepat, kaedah kotak Keller digunakan. Selepas itu, bagi nilai-nilai lain parameter, nilai-nilai $f''(0)$ dan $-\theta'(0)$ yang diperoleh tadi digunakan untuk membuat “tembakan” seterusnya. Selepas setiap proses, profil halaju dan suhu disemak bagi memastikan nilai berangka yang diperoleh itu sah. Profil halaju dan suhu yang betul mestilah memenuhi syarat sempadan (9).

Jadual 1 dan 2 masing-masing memaparkan nilai-nilai pekali geseran kulit $f''(0)$ dan nombor Nusselt setempat $-\theta'(0)$ bagi beberapa nilai parameter. Bagi nombor Prandtl $Pr = 0.7, 1$ dan 2 , graf perubahan $f''(0)$ dan $-\theta'(0)$ terhadap λ diplot, seperti dipamerkan dalam Rajah 2 dan 3. Dapat diperhatikan bahawa penyelesaian dual wujud bagi aliran menentang.

Dalam perbincangan berikut, cabang atas dan cabang bawah merujuk kepada Rajah 1 dan 2, iaitu cabang atas mempunyai nilai $f''(0)$ dan $-\theta'(0)$ yang lebih besar berbanding dengan cabang bawah. Penyelesaian wujud bagi semua nilai $\lambda > 0$ (aliran membantu), manakala bagi $\lambda < 0$ (aliran menentang), penyelesaian wujud sehingga nilai kritikal bagi λ , katalah λ_c . Berdasarkan kepada pengiraan berangka yang dilakukan, $\lambda_c = -1.0399, -1.1135$ dan -1.2850 masing-masing bagi $Pr = 0.7, 1$ dan 2 . Dapat diperhatikan daripada Rajah 2 dan 3 bahawa peningkatan nilai Pr akan meningkatkan julat nilai λ yang penyelesaian wujud.

Di antara dua penyelesaian yang diperoleh bagi kes $\lambda < 0$, penyelesaian mana yang relevan secara fizikal bergantung pada kestabilan penyelesaian tersebut. Ini dapat ditentukan dengan melakukan analisis kestabilan. Walau bagaimanapun, analisis kestabilan seperti yang dilakukan oleh Merkin (1985) dan Merrill et al. (2006) memerlukan pertimbangan aliran tak mantap, yang bukan termasuk dalam skop kajian ini. Namun begitu, dicadangkan bahawa cabang atas adalah stabil dan merupakan penyelesaian yang relevan secara fizikal, kerana ia merupakan satu-satunya penyelesaian bagi kes aliran membantu. Seperti yang dilaporkan oleh Merrill et al. (2006), percabangan nod-pelana pada $\lambda = \lambda_c$ memberi perubahan kepada kestabilan daripada stabil (cabang

JADUAL 1. Nilai-nilai $f''(0)$ bagi beberapa nilai Pr dan λ

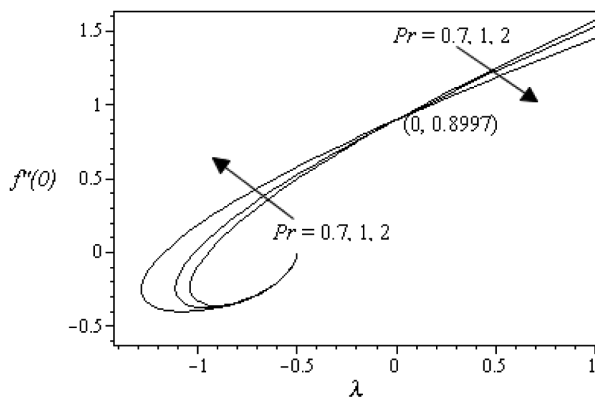
| Pr | $\lambda = 1$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = -1$ | |
|-----|---------------|---------------|----------------|--------------|
| | | | Cabang atas | Cabang bawah |
| 0.1 | 1.7779 | 0.8997 | - | - |
| 0.7 | 1.5701 | 0.8997 | -0.0891 | -0.3335 |
| 1 | 1.5287 | 0.8997 | 0.0234 | -0.3735 |
| 2 | 1.4488 | 0.8997 | 0.1850 | -0.3979 |
| 5 | 1.3482 | 0.8997 | 0.3509 | -0.3962 |
| 7 | 1.3136 | 0.8997 | 0.4025 | -0.3915 |
| 10 | 1.2786 | 0.8997 | 0.4525 | -0.3853 |
| 20 | 1.2161 | 0.8997 | 0.5373 | -0.3711 |

JADUAL 2. Nilai-nilai $-\theta'(0)$ bagi beberapa nilai Pr dan λ

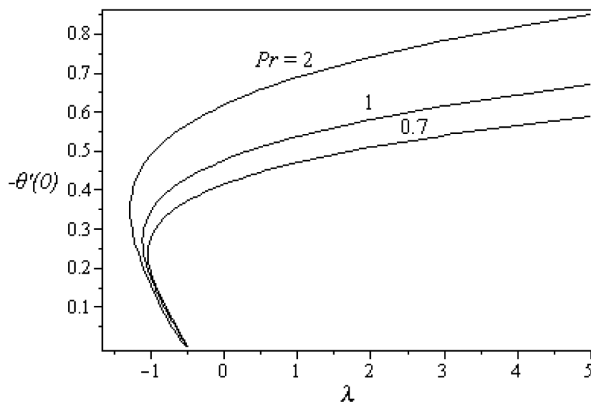
| Pr | $\lambda = 1$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = -1$ | |
|-----|---------------|---------------|----------------|--------------|
| | | | Cabang atas | Cabang bawah |
| 0.1 | 0.2155 | 0.1868 | - | - |
| 0.7 | 0.4713 | 0.4162 | 0.2799 | 0.1899 |
| 1 | 0.5379 | 0.4776 | 0.3476 | 0.1766 |
| 2 | 0.6902 | 0.6198 | 0.4913 | 0.1562 |
| 5 | 0.9478 | 0.8651 | 0.7352 | 0.1211 |
| 7 | 1.0622 | 0.9755 | 0.8449 | 0.1048 |
| 10 | 1.1975 | 1.1067 | 0.9756 | 0.0858 |
| 20 | 1.5083 | 1.4105 | 1.2786 | 0.0466 |

atas) kepada tak stabil (cabang bawah). Bagi penyelesaian cabang atas yang dijangkakan relevan secara fizikal, nilai nombor Nusselt setempat $-\theta'(0)$ yang mewakili kadar pemindahan haba pada permukaan meningkat dengan peningkatan nilai λ . Telatah yang sama diperhatikan bagi perubahan terhadap nombor Prandtl Pr, iaitu $-\theta'(0)$ meningkat apabila Pr meningkat.

Rajah 4 dan 5 masing-masing memaparkan profil halaju dan suhu bagi beberapa nilai Pr apabila $\lambda = -1$. Diperhatikan bahawa wujud dua profil bagi satu nilai Pr dan λ , yang kedua-duanya memenuhi syarat sempadan (9). Profil halaju dan suhu ini menyokong kewujudan dua penyelesaian apabila $\lambda = -1$ seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 1 dan 2 serta Rajah 2 dan 3.



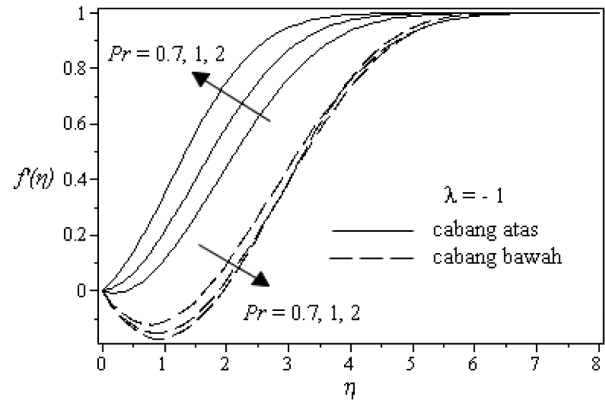
RAJAH 2. Perubahan pekali geseran kulit $f''(0)$ terhadap λ untuk Pr = 0.7, 1 dan 2



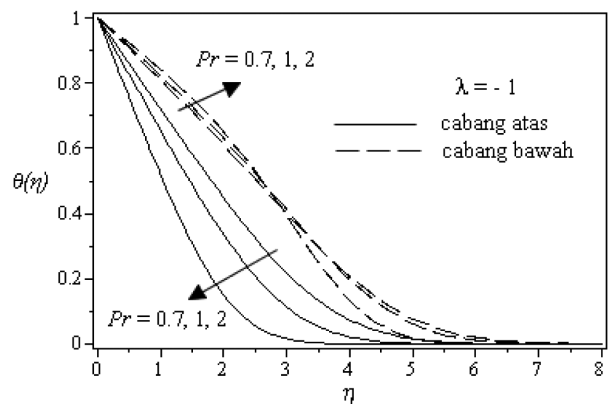
RAJAH 3. Perubahan nombor Nusselt setempat $-\theta'(0)$ terhadap λ untuk Pr = 0.7, 1 dan 2

KESIMPULAN

Pembentukan lapisan sempadan halaju dan terma yang dirangsang oleh aliran bebas bersebelahan plat tegak dengan suhu permukaan malar telah dikaji secara teori. Penyelesaian keserupaan boleh diperoleh jika halaju aliran bebas berkadaran dengan punca kuasa dua jarak dari hujung hadapan plat, iaitu $U(x) \sim \sqrt{x}$. Bagi aliran membantu ($\lambda > 0$), penyelesaian wujud bagi semua nilai parameter olakan



RAJAH 4. Profil halaju $f'(\eta)$ bagi beberapa nilai Pr apabila $\lambda = -1$



RAJAH 5. Profil suhu $\theta(\eta)$ bagi beberapa nilai Pr apabila $\lambda = -1$

campuran λ , manakala bagi aliran menentang ($\lambda < 0$), penyelesaian wujud hingga ke nilai kritikal λ_c . Penyelesaian adalah unik bagi aliran membantu, manakala penyelesaian dual wujud bagi aliran menentang. Analisis kestabilan yang tidak dilakukan dalam kajian ini boleh dilakukan pada masa hadapan untuk menentukan penyelesaian mana yang stabil antara dua penyelesaian itu. Bagi penyelesaian atas yang dijangkakan stabil, kadar pemindahan haba pada permukaan didapati meningkat dengan peningkatan daya keapungan dan nombor Prandtl.

PENGHARGAAN

Kajian ini dibiayai oleh geran Science Fund (Kod Projek: 06-01-02-SF0610) daripada Kementerian Sains, Teknologi dan Inovasi, Malaysia.

RUJUKAN

Ishak, A. 2009a. Mixed convection boundary layer flow over a horizontal plate with thermal radiation. *Heat Mass Transfer* 46: 147-151.
 Ishak, A. 2009b. Radiation effects on the flow and heat transfer over a moving plate in a parallel stream. *Chinese Physics Letters* 26: 034701.

- Ishak, A. 2010. Thermal boundary layer flow over a stretching sheet in a micropolar fluid with radiation effect. *Meccanica* 45: 367-373.
- Ishak, A., Merkin, J.H., Nazar, R. & Pop, I. 2008a. Mixed convection boundary layer flow over a vertical permeable surface with prescribed wall heat flux. *Z. angew. Math. Phys.* 59: 100-123.
- Ishak, A., Nazar, R. & Pop, I. 2007. Mixed convection on the stagnation-point flow towards a vertical, continuously stretching sheet. *ASME J. Heat Transfer* 129: 1087-1090.
- Ishak, A., Nazar, R. & Pop, I. 2008b. Local similarity solutions for laminar boundary layer flow along a moving cylinder in a parallel stream. *LNCS – Comp. Math* 5081: 224-235.
- Merkin, J.H. 1985. On dual solutions occurring in mixed convection in a porous medium. *J. Eng. Math.* 20: 171-179.
- Merrill, K., Beauchesne, M., Previte, J., Poullet, J. & Weidman, P. 2006. Final steady flow near a stagnation point on a vertical surface in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer* 49: 4681-4686.
- Merkin, J.H. & Mahmood, T. 1989. Mixed convection boundary-layer similarity solutions: prescribed wall heat flux. *Z. angew. Math. Phys.* 40: 51-68.
- Schlichting, H. 1979. *Boundary Layer Theory*. 7th Edition. New York: McGraw-Hill.
- Schneider, W. 1979. A similarity solution for combined forced and free convection flow over a horizontal plate. *Int. J. Heat Mass Transfer* 22: 1401-1406.

Pusat Pengajian Sains Matematik
Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi, Selangor
Malaysia

*Pengarang untuk surat-menyurat; email: anuarishak@yahoo.com

Diserahkan: 30 Disember 2008

Diterima: 20 Mei 2010